



# **(phi, Gamma)-modules et loi explicite de réciprocité**

Floric Tavares Ribeiro

## **► To cite this version:**

Floric Tavares Ribeiro. (phi, Gamma)-modules et loi explicite de réciprocité. Mathématiques [math]. Université de Franche-Comté, 2008. Français. NNT: . tel-00379771

**HAL Id: tel-00379771**

**<https://theses.hal.science/tel-00379771>**

Submitted on 29 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté

Spécialité :

**Mathématiques**

présentée par

**Floric Tavares Ribeiro**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université de  
Franche-Comté

**$(\varphi, \Gamma)$ -modules et loi explicite de réciprocité**

soutenue le 29 mai 2008 devant le jury composé de :

<b>M. Denis Benois</b>	<b>Directeur de Thèse</b>
<b>M. Laurent Berger</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Victor Abrashkin</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Chazad Movahhedi</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Laurent Herr</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Christian Maire</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Thong Nguyen Quang Do</b>	<b>Examineur</b>

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 $(\varphi, \Gamma)$ -modules	7
0.2 Extension métabélienne	8
0.3 Cohomologie galoisienne	9
0.4 Formules explicites pour le symbole de Hilbert	10
0.5 Formule explicite pour un groupe formel	11
0.6 Stratégie	12
0.7 Plan	13
<b>1 <math>(\varphi, \Gamma)</math>-modules et cohomologie</b>	<b>15</b>
1.1 Notations	15
1.2 Le corps $\tilde{\mathbf{E}}$ , l'anneau $\tilde{\mathbf{A}}$ et certains de leurs sous-anneaux.	17
1.3 Les anneaux de périodes $p$ -adiques.	20
1.3.1 $B_{dR}$ et quelques sous-anneaux remarquables	20
1.3.2 Classification des représentations de $G_K$	21
1.4 Théorie de Fontaine	22
1.4.1 Rappel du cas classique	22
1.4.2 Le cas métabélien	23
1.4.3 Remarques	25
1.5 Cohomologie Galoisienne	25
1.5.1 Énoncé du théorème	25
1.5.2 Démonstration de $i)$	27
1.5.3 Formules explicites	33
1.5.4 Une démonstration alternative	36
1.6 Cup-produit	39
1.6.1 Formule explicite pour le cup-produit	39
1.6.2 Démonstration	40
1.7 Application de Kummer	42
<b>2 Groupes Formels</b>	<b>47</b>
2.1 Notations et rappels sur les groupes formels	47
2.1.1 Loi de Groupe Formel	47

2.1.2	Périodes $p$ -adiques . . . . .	48
2.2	Rappels sur le groupe formel $F$ . . . . .	51
2.3	L'anneau $\mathcal{G}_{[b,a]}$ et certains sous-anneaux. . . . .	55
2.3.1	Présentation des objets . . . . .	55
2.3.2	Précisions topologiques . . . . .	57
2.4	Le symbole de Hilbert d'un groupe formel . . . . .	62
2.4.1	L'accouplement associé au symbole de Hilbert . . . . .	62
2.4.2	La matrice des périodes approchée . . . . .	65
2.4.3	Calcul explicite du symbole de Hilbert . . . . .	68
2.4.4	Démonstration . . . . .	69
2.5	Formule explicite . . . . .	75
2.5.1	Énoncé du théorème . . . . .	75
2.5.2	Démonstration . . . . .	75

<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>
----------------------	-----------



## *Remerciements*

*J'adresse en premier lieu ma profonde gratitude à Denis Benois, qui m'a initié à la recherche mathématique. Il m'a offert de précieuses idées avec beaucoup de patience et une grande expérience.*

*Je tiens également à remercier Laurent Berger qui a lu mon travail en détail et m'a permis par ses remarques pertinentes de le corriger et l'améliorer. De même, je suis reconnaissant à Victor Abrashkin qui a accordé une profonde attention à ce travail.*

*J'adresse encore mes remerciements à tous les membres du jury, pour le temps et l'énergie qu'ils m'ont consacrés.*

*J'ai bénéficié au cours de ma thèse de l'excellente ambiance de travail qui règne au Laboratoire de Mathématiques de Besançon et particulièrement au sein de l'Équipe d'Algèbre et Théorie des Nombres. Au long de ses années, et jusqu'à l'heure où j'écris ces remerciements, j'ai profité (et abusé) du soutien de nombreux amis, un grand merci à eux.*



# Introduction

## 0.1 $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Soit  $p$  un nombre premier et  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  de corps résiduel  $k$ . On fixe  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$  et on note  $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  le groupe de Galois absolu de  $K$ . On introduit encore  $K_\infty = \cup_n K(\zeta_{p^n})$  l'extension cyclotomique de  $K$  et  $\Gamma_K = \text{Gal}(K_\infty/K)$ .

Ce travail participe de la théorie des représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois d'un corps local, ici  $G_K$ . On s'intéresse particulièrement aux représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$ , *i.e.* aux  $\mathbb{Z}_p$ -modules de type fini munis d'une action linéaire et continue de  $G_K$ .

Dans [Fon90], Fontaine introduit la notion de  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur l'anneau  $\mathbf{A}_K$ . Cet anneau est, quand  $K$  est absolument non ramifié l'ensemble des séries  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n$  avec  $a_n \in \mathcal{O}_K$ ,  $a_n$  tendant  $p$ -adiquement vers 0 pour  $n$  tendant vers  $-\infty$  et  $X$  une indéterminée sur laquelle  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  agissent par

$$\varphi(X) = (1 + X)^p - 1 ; \quad \gamma(X) = (1 + X)^{\chi(\gamma)} - 1.$$

Un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{A}_K$  est alors un module de type fini sur  $\mathbf{A}_K$  muni d'actions semi-linéaires de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$ , ces deux actions commutant.

Fontaine définit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$  et la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}_K$ . Cherbonnier et Colmez ont montré dans [CC98] que toute représentation  $p$ -adique est surconvergente, ce qui établit un premier lien entre le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $D(V)$  d'une représentation  $V$  et son module de de Rham. Berger ensuite, dans [Ber02], a montré comment retrouver les modules de de Rham  $D_{dR}(V)$ , semi-stable  $D_{st}(V)$  ou cristallin  $D_{cris}(V)$  de la théorie de Fontaine à partir de  $D(V)$ . Pour les représentations absolument cristallines, Wach a fourni dans [Wac96] une autre construction très puissante qui permet de retrouver le module  $D_{cris}(V)$  dans le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $D(V)$ . Cette construction a été étudiée en détails dans [Ber04] par Berger qui précise les résultats de Wach. Les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sont également intimement liés à la théorie d'Iwasawa comme le montrent les travaux de Cherbonnier et Colmez ([CC99]), Benois ([Ben00]) ou Berger ([Ber03]).



Citons enfin une autre contribution d'importance apportée dans sa thèse ([Her98]) par Herr qui fournit un complexe de trois termes en le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module d'une représentation, dont l'homologie calcule la cohomologie galoisienne de la représentation.

## 0.2 Extension métabélienne

La construction des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules repose sur l'utilisation de la tour cyclotomique et montre le rôle fondamental qu'elle joue. Mais il est une autre extension remarquable dans l'étude des représentations  $p$ -adiques.

Fixons  $\pi$  une uniformisante de  $K$  et  $\pi_n$  un système de racines  $p^n$ -ièmes de  $\pi$  :

$$\pi_0 = \pi \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \pi_{n+1}^p = \pi_n.$$

C'est alors le comportement dans l'extension  $K_\pi = \bigcup_n K(\pi_n)$  qui produit la différence entre une représentation cristalline et une représentation semi-stable.

Citons encore le résultat remarquable suivant.

### **Théorème 0.1. (Breuil, Kisin)**

*Le foncteur d'oubli de la catégorie des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $G_K$  vers la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_{K_\pi}$  est pleinement fidèle.*

Ce théorème a été conjecturé par Breuil dans [Bre99] où il le montre sous certaines conditions sur les poids de Hodge-Tate de la représentation, à l'aide d'objets très proches des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules de Fontaine. Kisin prouve ce résultat inconditionnellement dans [Kis06]. D'autres résultats, d'Abrashkin notamment ([Abr97, Abr95]), poussent à introduire, comme Breuil, des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules où l'on remplace l'extension cyclotomique  $K_\infty$  par  $K_\pi$ . Toutefois,  $K_\pi/K$  n'étant pas galoisienne, on n'obtient ainsi que des  $\varphi$ -modules (également étudiés par Fontaine dans [Fon90]).

On se place alors dans la clôture galoisienne  $L$  de  $K_\pi$  qui n'est autre que le compositum de  $K_\pi$  et de  $K_\infty$ , une extension *métabélienne* de  $K$ . On perd toutefois le côté explicite de la description du corps des normes de cette extension. Notons  $G_\infty = \text{Gal}(L/K)$ . Notre premier résultat peut, pour  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$  ou  $\tilde{\mathbf{A}}$ , et  $\mathbf{A}'_L = \mathbf{A}'^{G_L}$  (où  $\mathbf{A}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont les anneaux de Fontaine définis au paragraphe 1.2), s'exprimer ainsi :

### **Théorème 0.2.**

*Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{représentations } \mathbb{Z}_p\text{-adiques de } G_K\} & \rightarrow & \{(\varphi, G_\infty)\text{-modules étales sur } \mathbf{A}'_L\} \\ V & \mapsto & D_L(V) = (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{A}')^{G_L} \end{array}$$

*est une équivalence de catégories.*

En fait, on montre que le  $(\varphi, G_\infty)$ -module  $D_L(V)$  n'est autre que l'extension des scalaires du  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module usuel  $D(V)$  de  $\mathbf{A}_K$  à  $\mathbf{A}'_L$ .

### 0.3 Cohomologie galoisienne

On peut donc maintenant associer à une représentation un  $(\varphi, G_\infty)$ -module qui apporte un meilleur contrôle du comportement dans l'extension  $K_\pi$  de la représentation. Mais on veut conserver les outils disponibles dans le cadre classique, en premier lieu le complexe de Herr. Rappelons que dans le cas usuel des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules, Herr a montré dans [Her98] que l'homologie du complexe

$$0 \longrightarrow D(V) \xrightarrow{f_1} D(V) \oplus D(V) \xrightarrow{f_2} D(V) \longrightarrow 0$$

avec les applications

$$f_1 = \begin{pmatrix} \varphi - 1 \\ \gamma - 1 \end{pmatrix} \text{ et } f_2 = (\gamma - 1, 1 - \varphi)$$

calcule la cohomologie galoisienne de la représentation  $V$ .

Le groupe  $G_\infty$  étant maintenant de dimension 2, le complexe correspondant perd en simplicité. Si  $\tau$  est un générateur topologique du sous-groupe  $\text{Gal}(L/K_\infty)$  et  $\gamma$  un générateur topologique de  $\text{Gal}(L/K_\pi)$  vérifiant  $\gamma\tau\gamma^{-1} = \tau^{\chi(\gamma)}$ , on le décrit ainsi :

**Théorème 0.3.**

Soit  $V$  une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique de  $G_K$  et  $D$  son  $(\varphi, G_\infty)$ -module. L'homologie du complexe

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\alpha} D \oplus D \oplus D \xrightarrow{\beta} D \oplus D \oplus D \xrightarrow{\eta} D \longrightarrow 0$$

où

$$\alpha = \begin{pmatrix} \varphi - 1 \\ \gamma - 1 \\ \tau - 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 1 - \varphi & 0 \\ \tau - 1 & 0 & 1 - \varphi \\ 0 & \tau^{\chi(\gamma)} - 1 & \delta - \gamma \end{pmatrix}, \eta = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1, \delta - \gamma, \varphi - 1)$$

avec  $\delta = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)(\tau - 1)^{-1} \in \mathbb{Z}_p[[\tau - 1]]$ , s'identifie canoniquement et fonctoriellement à la cohomologie galoisienne continue de  $V$ .

En fait, on obtient encore des isomorphismes explicites. En particulier, pour le premier groupe de cohomologie, si  $(x, y, z) \in \ker \beta$ , soit  $b$  une solution dans  $V \otimes \mathbf{A}'$  de

$$(\varphi - 1)b = x,$$

alors le théorème ci-dessus associe à la classe du triplet  $(x, y, z)$  la classe du cocycle :

$$c : \sigma \mapsto c_\sigma = -(\sigma - 1)b + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} z + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} y$$

où  $\sigma|_{G_\infty} = \gamma^n \tau^m$ .

De plus, à l'instar de Herr dans [Her01], on fournit des formules explicites décrivant le cup-produit en termes du complexe de Herr à quatre termes ci-dessus.

## 0.4 Formules explicites pour le symbole de Hilbert

Le symbole de Hilbert, pour un corps  $K$  contenant le groupe  $\mu_{p^n}$  des racines  $p^n$ -ièmes de l'unité, est défini comme l'accouplement

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{p^n} : K^*/K^{*p^n} \times K^*/K^{*p^n} &\rightarrow \mu_{p^n} \\ (a, b)_{p^n} &= \left( {}^p\sqrt{b} \right)^{r_K(a)-1} \end{aligned}$$

où  $r_K : K^* \rightarrow G_K^{\text{ab}}$  est l'application de réciprocity.

Depuis 1858 et les travaux de Kummer, de nombreuses formules explicites ont été données pour ce symbole de Hilbert. Citons celle de Coleman ([Col81]) : on suppose que  $K = K_0(\zeta_{p^n})$  où  $K_0$  est une extension finie, non ramifiée, de  $\mathbb{Q}_p$  et  $\zeta_{p^n}$  une racine primitive  $p^n$ -ième de l'unité fixée. On note encore  $W$  l'anneau des entiers de  $K_0$ . Si  $F \in 1 + (p, X) \subset W[[X]]$ , alors  $F(\zeta_{p^n} - 1)$  est une unité principale de  $K$  et on les obtient toutes de cette manière. On prolonge le Frobenius absolu  $\varphi$  de  $W$  à  $W[[X]]$  par  $\varphi(X) = (1 + X)^p - 1$ . On note pour  $F \in W[[X]]$

$$\mathcal{L}(F) = \frac{1}{p} \log \frac{F(X)^p}{\varphi(F(X))} \in W[[X]].$$

Ainsi, pour  $F \in 1 + (p, X)$ ,

$$\mathcal{L}(F) = \left( 1 - \frac{\varphi}{p} \right) \log F(X).$$

La formule de Coleman peut alors s'écrire :

### **Théorème 0.4. (Coleman)**

Soit  $F, G \in 1 + (p, X) \subset W[[X]]$ , alors

$$(F(\zeta_{p^n} - 1), G(\zeta_{p^n} - 1))_{p^n} = \zeta_{p^n}^{[F, G]_n}$$

où

$$[F, G]_n = \text{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p} \circ \text{Res}_X \frac{1}{\varphi^n(X)} \left( \mathcal{L}(G) d \log F - \frac{1}{p} \mathcal{L}(F) d \log G^\varphi \right).$$

Citons encore la formule de Brückner-Vostokov : on suppose cette fois que  $p \neq 2$ ,  $\zeta_{p^n} \in K$ ,  $W$  est l'anneau des entiers de  $K_0$ , extension maximale non ramifiée de  $K/\mathbb{Q}_p$ . On prolonge le Frobenius  $\varphi$  de  $W$  à  $W[[Y]][1/Y]$  par  $\varphi(Y) = Y^p$ . On fixe encore  $\pi$  une uniformisante de  $K$ .

### **Théorème 0.5. (Brückner-Vostokov)**

Soit  $F, G \in (W[[Y]][1/Y])^\times$ , alors

$$(F(\pi), G(\pi))_{p^n} = \zeta_{p^n}^{[F, G]_n}$$

où

$$[F, G]_n = \text{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p} \circ \text{Res}_Y \frac{1}{s^{p^n} - 1} \left( \mathcal{L}(G) d \log F - \frac{1}{p} \mathcal{L}(F) d \log G^\varphi \right)$$

avec  $s \in W[[Y]]$  tel que  $s(\pi) = \zeta_{p^n}$ .

Le but de la seconde partie de ce travail est de montrer une généralisation de cette formule au cas d'un groupe formel.

Notons qu'il existe d'autres types de formules, notamment celle de Sen ([Sen80]), généralisée à un groupe formel quelconque par Benois dans [Ben97].

Pour un historique fourni des formules explicites du symbole de Hilbert, on renvoie le lecteur à [Vos00].

## 0.5 Formule explicite pour un groupe formel

Soit  $G$  un groupe formel connexe et lisse de dimension  $d$  et de hauteur finie  $h$  sur l'anneau des vecteurs de Witt  $W = W(k)$  'à coefficients dans un corps fini  $k$ . Soit  $K_0$  le corps des fractions de  $W$  et  $K$  une extension finie de  $K_0$  qui contient les points de  $p^M$  torsion  $G[p^M]$  de  $G$ . On définit alors le symbole de Hilbert de  $G$  par l'accouplement

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{G,M} : K^* \times G(\mathfrak{m}_K) &\rightarrow G[p^M] \\ (x, \beta)_{G,M} &= r_K(x)(\beta_1) -_G \beta_1 \end{aligned}$$

où  $r_K : K^* \rightarrow G_K^{\text{ab}}$  est l'application de réciprocité et  $\beta_1$  vérifie

$$p^M \text{id}_G \beta_1 = \beta.$$

On fixe une base des logarithmes de  $G$  sous la forme d'un logarithme vectoriel  $l_G \in K_0[[\mathbf{X}]]^d$  où  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  telle que l'on a l'égalité formelle

$$l_G(\mathbf{X} +_G \mathbf{Y}) = l_G(\mathbf{X}) + l_G(\mathbf{Y}).$$

On complète  $l_G$  par des presque-logarithmes  $m_G \in K_0[[\mathbf{X}]]^{h-d}$  en une base  $\begin{pmatrix} l_G \\ m_G \end{pmatrix}$  du module de Dieudonné de  $G$ .

Fontaine définit dans [Fon77] (voir aussi [Col92] pour une description explicite) un accouplement entre le module de Dieudonné et le module de Tate de  $G$

$$T(G) = \varprojlim G[p^n].$$

Les travaux de Honda [Hon70] montrent qu'il existe une série de la forme  $\mathcal{A}^* = \sum_{n \geq 1} F_n \varphi^n$  avec  $F_n \in M_d(W)$  telle que

$$\left(1 - \frac{\mathcal{A}^*}{p}\right) l_G(\mathbf{X}) \in M_d(W[[\mathbf{X}]]).$$

Introduisons encore la matrice des périodes approchée. On fixe  $(o^1, \dots, o^h)$  une base de  $T(G)$  où  $o^i = (o_n^i)_{n \geq 1}$  tel que  $p \text{id}_G o_n^i = o_{n-1}^i$ . On approche  $(o^1 = (o_n^1)_n, \dots, o^h)$

par la base  $(o_M^1, \dots, o_M^h)$  de  $G[p^M]$ . Puis pour tout  $i$ , on choisit  $\hat{o}_M^i \in F(YW[[Y]])$  tels que  $\hat{o}_M^i(\pi) = o_M^i$ . La matrice  $\mathcal{V}_Y$  est alors

$$\mathcal{V}_Y = \begin{pmatrix} p^M l_G(\hat{o}_M^1) & \dots & p^M l_G(\hat{o}_M^h) \\ p^M m_G(\hat{o}_M^1) & \dots & p^M m_G(\hat{o}_M^h) \end{pmatrix}.$$

C'est une approximation de la matrice des périodes  $\mathcal{V}$ .

On peut désormais énoncer la loi de réciprocité qui généralise la loi de Brückner-Vostokov et qui constitue le but de la seconde partie de cette thèse :

**Théorème 0.6.**

Soit  $\alpha \in (W[[Y]][\frac{1}{Y}])^\times$  et  $\beta \in G(YW[[Y]])$ . Le symbole de Hilbert  $(\alpha(\pi), \beta(\pi))_{G,M}$  a pour coordonnées dans la base  $(o_M^1, \dots, o_M^h)$  :

$$(\mathrm{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p} \circ \mathrm{Res}_Y) \mathcal{V}_Y^{-1} \left( \left( \begin{pmatrix} (1 - \frac{A^*}{p}) l_G(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} d_{\log} \alpha - \mathcal{L}(\alpha) \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_G(\beta) \\ m_G(\beta) \end{pmatrix} \right) \right).$$

Cette loi de réciprocité est montrée par Abrashkin dans [Abr97] sous l'hypothèse que  $K$  contient les racines  $p^M$ -ièmes de l'unité. Vostokov et Demchenko la montrent dans [VD00] sans condition sur  $K$  pour les groupes formels de dimension 1. Nous allons la montrer en toute généralité.

## 0.6 Stratégie

L'idée de la preuve est due à Benois qui dans [Ben00] la met en oeuvre pour montrer la loi de réciprocité de Coleman. Rappelons de quoi il s'agit.

Le symbole de Hilbert peut être vu comme un cup-produit par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} K^* \times K^* & \xrightarrow{(\cdot)_{p^n}} & \mu_{p^n} \\ \kappa \times \kappa \downarrow & & \uparrow \mathrm{inv}_K \\ H^1(K, \mu_{p^n}) \times H^1(K, \mu_{p^n}) & \xrightarrow{\cup} & H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \end{array}$$

où  $\kappa$  est l'application de Kummer. Il s'agit alors de calculer de manière explicite cette application de Kummer en termes du complexe de Herr associé à la représentation  $\mathbb{Z}_p(1)$ , puis d'utiliser les formules de Herr de [Her01] pour le cup-produit et enfin de calculer l'image ainsi obtenue par l'isomorphisme  $\mathrm{inv}_K$ .

Pour un groupe formel quelconque, la situation est assez similaire, on a cette fois le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^* \times G(\mathfrak{m}_K) & \xrightarrow{(\cdot)_{G,M}} & G[p^M] \\ \kappa \times \kappa_G \downarrow & & \uparrow \mathrm{inv}_K \\ H^1(K, \mu_{p^M}) \times H^1(K, G[p^M]) & \xrightarrow{\cup} & H^2(K, \mu_{p^M} \otimes G[p^M]) \end{array}$$

avec

$$G[p^M] \simeq (\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^h,$$

$$\text{et } H^2(K, \mu_{p^M} \otimes G[p^M]) \simeq H^2(K, \mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}(1)) \otimes_{\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}} G[p^M].$$

Les formules pour l'application de Kummer et le cup-produit sont montrées dans la partie sur les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Le calcul de la formule explicite pour l'application  $\kappa_G : G(\mathfrak{m}_K) \rightarrow H^1(K, G[p^M])$  constitue l'axe technique de ce travail.

Abrashkin passe quant à lui par l'intermédiaire du symbole de Witt et, pour conclure, par le corps des normes de l'extension  $K_\pi/K$ , il utilise la compatibilité de l'application de réciprocité entre le corps des normes d'une extension et le corps de base. Certains de ces résultats intermédiaires ([Abr97, Propositions 3.7 et 3.8]) se traduisent directement dans le langage des  $(\varphi, G_\infty)$ -modules. On cherche en effet à calculer un triplet  $(x, y, z)$  dans le premier groupe d'homologie du complexe de Herr généralisé associé à la représentation  $G[p^M]$ . Les résultats d'Abrashkin donnent  $x$ , la nullité de  $y$  et l'appartenance de  $z$  à  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  (où  $\tilde{\mathbf{E}}$  est un anneau de Fontaine, cf 1.2 ci-dessous). Toutefois, le calcul nécessite la connaissance de  $z$  modulo  $XW(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  et donc de préciser les calculs d'Abrashkin à un ordre supérieur.

## 0.7 Plan

Cette thèse se compose de deux parties. Dans la première, on introduit les  $(\varphi, G_\infty)$ -modules, on donne le complexe de Herr associé et les formules explicites dans ce complexe de Herr pour la cohomologie, le cup-produit et le symbole de Hilbert. Dans la seconde partie, suivant les calculs d'Abrashkin, on donne des résultats d'approximation, en particulier pour la matrice des périodes approchée et l'on mène le calcul explicite du symbole de Hilbert en termes du complexe de Herr. Enfin, on montre la loi explicite de réciprocité de Brückner-Vostokov pour les groupes formels.



# Chapitre 1

## $(\varphi, \Gamma)$ -modules et cohomologie

### 1.1 Notations

On commence par rappeler et préciser les notations.

Fixons  $p$  un nombre premier.

Rappelons (cf. [Ser68]) que si  $\mathbb{K}$  est un corps parfait de caractéristique  $p$ , on peut munir l'espace  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  des suites d'éléments de  $\mathbb{K}$  d'une structure d'anneau local intègre de caractéristique 0 absolument non ramifié et de corps résiduel  $\mathbb{K}$ , appelé anneau des vecteurs de Witt sur  $\mathbb{K}$ . On note  $W(\mathbb{K})$  cet anneau. Rappelons encore que cette construction permet de définir une section multiplicative de la surjection canonique

$$W(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K},$$

appelée relèvement de Teichmüller et notée  $[\ ]$ . Si  $R$  est un sous-anneau (unitaire ou non) de  $\mathbb{K}$ , on note encore  $W(R)$  les vecteurs de Witt à coefficients dans  $R$ , il s'agit d'un sous-anneau (non nécessairement unitaire) de  $W(\mathbb{K})$ .

Fixons  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  de corps résiduel  $k$ .

On note  $W = W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt sur  $k$ . Alors  $K_0 = W \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  s'identifie à la sous-extension non ramifiée de  $K$  sur  $\mathbb{Q}_p$  de corps résiduel  $k$ , qui est encore la sous-extension maximale non ramifiée de  $K$  sur  $\mathbb{Q}_p$ .

On fixe  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$  et on note

$$G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$$

le groupe de Galois absolu de  $K$  et  $\mathbb{C}_p$  le complété de  $\overline{K}$  pour la topologie  $p$ -adique. On munit  $\mathbb{C}_p$  de la valuation  $p$ -adique  $v_p$  normalisée par

$$v_p(p) = 1.$$

Rappelons que l'action de  $G_K$  sur  $\overline{K}$  s'étend par continuité à  $\mathbb{C}_p$ .

On fixe  $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$  un système cohérent de racines  $p^n$ -ièmes primitives de l'unité,



*i.e.*  $\zeta_{p^n}^p = \zeta_{p^{n-1}}$  pour tout  $n$ ,  $\zeta_1 = 1$  et  $\zeta_p \neq 1$ . Alors

$$K_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(\zeta_{p^n})$$

est l'extension cyclotomique de  $K$ . On note  $G_{K_\infty} = \text{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$  son groupe de Galois absolu et  $\Gamma_K = \text{Gal}(K_\infty/K)$  le quotient.

De même on fixe  $\pi$  une uniformisante de  $K$  et  $\rho = (\pi_{p^n})_{n \geq 0}$  un système cohérent de racines  $p^n$ -ièmes de  $\pi$ . On note

$$K_\pi = \bigcup_{n \geq 0} K(\pi_{p^n}).$$

L'extension  $K_\pi/K$  n'est alors pas galoisienne et on pose

$$L = \bigcup_{n \geq 0} K(\zeta_{p^n}, \pi_{p^n})$$

sa clôture galoisienne, qui est le compositum de  $K_\pi$  et de  $K_\infty$ . On note son groupe de Galois absolu  $G_L = \text{Gal}(\overline{K}/L)$  et  $G_\infty = \text{Gal}(L/K)$  le quotient. Le caractère cyclotomique  $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  se factorise par  $G_\infty$  (même par  $\Gamma_K$ ) ; il en va de même de l'application  $\psi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p$  définie par

$$\forall g \in G_K \quad g(\pi_{p^n}) = \pi_{p^n} \zeta_{p^n}^{\psi(g)}.$$

De plus, le groupe  $G_\infty$  s'identifie au produit semi-direct de  $\mathbb{Z}_p$  par  $\Gamma_K$  qui est, à travers  $\chi$ , un sous-groupe ouvert de  $\mathbb{Z}_p^*$  et  $G_\infty$  est donc topologiquement engendré par deux générateurs, que l'on fixe,  $\gamma$  et  $\tau$  vérifiant :

$$\gamma \tau \gamma^{-1} = \tau^{\chi(\gamma)}.$$

On choisit de plus  $\tau$  tel que  $\psi(\tau) = 1$ , *i.e.* tel que

$$\tau(\rho) = \rho\varepsilon.$$

On adopte la convention que tous les complexes considérés dans ce texte auront leur premier terme en degré  $-1$  si ce terme est 0 et en degré 0 sinon.

### Remarque

Le groupe  $G_\infty$  est un groupe de Lie  $p$ -adique si bien que l'extension  $L/K$  est arithmétiquement profinie (cf [Win83, Ven03]).

## 1.2 Le corps $\tilde{\mathbf{E}}$ , l'anneau $\tilde{\mathbf{A}}$ et certains de leurs sous-anneaux.

On renvoie à [Fon90] pour les résultats de cette partie. On choisit toutefois les notations de Colmez. Les anneaux  $R$ ,  $W(\text{Frac}R)$  ou  $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$  de [Fon90] deviennent ainsi  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\mathbf{A}$ .

On définit  $\tilde{\mathbf{E}}$  comme la limite projective

$$\tilde{\mathbf{E}} = \varprojlim_n \mathbb{C}_p$$

où les applications de transition sont l'élévation à la puissance  $p$ . Un élément de  $\tilde{\mathbf{E}}$  est donc une suite  $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$(x^{(n+1)})^p = x^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On munit  $\tilde{\mathbf{E}}$  de l'addition

$$x + y = s \text{ où } s^{(n)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$$

et du produit

$$x.y = t \text{ où } t^{(n)} = x^{(n)}.y^{(n)}.$$

Ces opérations font de  $\tilde{\mathbf{E}}$  un corps de caractéristique  $p$ , algébriquement clos et complet pour la valuation

$$v_{\mathbf{E}}(x) := v_p(x^{(0)}).$$

L'anneau des entiers de  $\tilde{\mathbf{E}}$ , noté  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ , s'identifie alors à la limite projective  $\varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ; c'est un anneau local dont l'idéal maximal, noté  $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}$  s'identifie à  $\varprojlim \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$  et de corps résiduel isomorphe à  $\bar{k}$ .

Le corps  $\tilde{\mathbf{E}}$ , comme son anneau d'entier  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ , possède encore une action naturelle de  $G_K$  qui est continue pour la topologie  $v_{\mathbf{E}}$ -adique. On le munit du Frobenius

$$\varphi : x \mapsto x^p$$

qui agit de manière continue, commute à l'action de  $G_K$  et stabilise  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ .

On pose maintenant  $\tilde{\mathbf{A}} = W(\tilde{\mathbf{E}})$  l'anneau des vecteurs de Witt sur  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}^+ = W(\tilde{\mathbf{E}}^+)$ .

Tout élément de  $\tilde{\mathbf{A}}$  (respectivement  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ ) s'écrit donc de manière unique sous la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p^n [x_n]$$

où  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}$  (respectivement de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ ).

On munit  $\tilde{\mathbf{A}}$  de la topologie produit sur  $W(\tilde{\mathbf{E}}) = \tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}$ , autrement dit, de la topologie de la convergence simple pour la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p^n [x_{n,m}] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n [x_n] \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad (x_{n,m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (x_n).$$

Cette topologie est compatible avec la structure d'anneau de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Elle est moins forte que la topologie  $p$ -adique.

On remarque que les suites  $\varepsilon$  et  $\rho$  introduites ci-dessus définissent des éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  et on note

$$X = [\varepsilon] - 1 \text{ et } Y = [\rho].$$

Ce sont des éléments de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et même de  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ . Ils sont donc topologiquement nilpotents. On a ainsi des bases de voisinage de 0 dans  $\tilde{\mathbf{A}}$  :

$$\{p^n \tilde{\mathbf{A}} + X^m \tilde{\mathbf{A}}^+\}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \text{ et } \{p^n \tilde{\mathbf{A}} + Y^m \tilde{\mathbf{A}}^+\}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}.$$

On note  $W[[X, Y]]$  le sous-anneau de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  des séries en  $X$  et  $Y$ , il est stable sous l'action de  $G_K$  qui est donnée par :

$$g(1 + X) = (1 + X)^{\chi(g)} \text{ et } g(Y) = Y(1 + X)^{\psi(g)}$$

et sous celle de  $\varphi$  :

$$\varphi(X) = (1 + X)^p - 1 \text{ et } \varphi(Y) = Y^p.$$

### Remarques

Si le morphisme de spécialisation pour les polynômes

$$\begin{array}{ccc} W[X_1, X_2] & \rightarrow & \tilde{\mathbf{A}}^+ \\ X_1, X_2 & \mapsto & X, Y \end{array}$$

est injectif, celui pour les séries formelles

$$\begin{array}{ccc} W[[X_1, X_2]] & \rightarrow & \tilde{\mathbf{A}}^+ \\ X_1, X_2 & \mapsto & X, Y \end{array}$$

ne l'est pas a priori.

Par ailleurs, on a le résultat suivant

### Lemme 1.1.

*L'anneau  $W[[X, Y]]$  est complet pour la topologie induite par  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ .*

*Preuve du lemme :* Il s'agit de montrer que si une suite  $(x_n)_n \in (W[[X, Y]])^{\mathbb{N}}$  converge vers 0 alors à  $m, N \in \mathbb{N}$  fixés, pour  $n$  assez grand, on a

$$x_n \in p^m W[[X, Y]] + W[[X, Y]]_{>N}$$

où  $W[[X, Y]]_{>N}$  est le sous-anneau des séries de la forme  $\sum_{k+l>N} a_{k,l} X^k Y^l$ .  
Écrivons

$$x_n = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} a_{k,l}^{(n)} X^k Y^l = \sum_{k+l \leq N} a_{k,l}^{(n)} X^k Y^l + \sum_{k+l > N} a_{k,l}^{(n)} X^k Y^l.$$

Il faut alors montrer que, modulo  $p^m$  et pour  $n$  assez grand,

$$\sum_{k+l \leq N} a_{k,l}^{(n)} X^k Y^l \in W[[X, Y]]_{>N}.$$

Ici il s'agit de remarquer que, puisque l'on raisonne modulo  $p^m$ , les coefficients  $a_{k,l}^{(n)}$  vivent dans  $W/p^m W$  qui est fini, il existe donc seulement un nombre fini de polynômes de la forme  $\sum_{k+l \leq N} a_{k,l}^{(n)} X^k Y^l$ . En coupant la suite  $(x_n)$  en sous-suites selon ces polynômes (quand ils apparaissent une infinité de fois dans la suite  $x_n$ ), on peut donc supposer que les coefficients  $a_{k,l}^{(n)}$  sont indépendants de  $n$  pour  $k+l \leq N$ . On les note  $a_{k,l}$ .

Bref, on s'est ramené à une suite  $(x_n)_n \in (W[[X, Y]] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  convergeant vers 0 et s'écrivant modulo  $p^m$  :

$$x_n = \sum_{k+l \leq N} a_{k,l} X^k Y^l + \sum_{k+l > N} a_{k,l}^{(n)} X^k Y^l.$$

Il s'agit de montrer que

$$\sum_{k+l \leq N} a_{k,l} X^k Y^l \in W[[X, Y]]_{>N} \pmod{p^m}$$

ou, de manière équivalente, qu'il existe une suite  $a_{k,l}$  pour  $k+l > N$  telle que

$$\sum_{k,l \in \mathbb{N}} a_{k,l} X^k Y^l = 0$$

ce qui se montre en utilisant la convergence de  $x_n$  vers 0 et un procédé diagonal.  $\square$

On note  $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$  le complété  $p$ -adique de  $\mathbb{Z}_p[[X]][\frac{1}{X}]$ , il s'agit de l'ensemble

$$\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \mid \forall n \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Z}_p \text{ et } a_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \right\}.$$

C'est un sous-anneau local  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}$ , complet, de corps résiduel  $\mathbb{F}_p((\varepsilon - 1))$  et on définit  $\mathbf{A}$  le complété pour la topologie  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Son corps résiduel est donc la clôture séparable de  $\mathbb{F}_p((\varepsilon - 1))$  dans  $\tilde{\mathbf{E}}$ . On le note  $\mathbf{E}$ . Il s'agit d'un sous-corps dense de  $\tilde{\mathbf{E}}$ .

### 1.3 Les anneaux de périodes $p$ -adiques.

#### 1.3.1 $B_{dR}$ et quelques sous-anneaux remarquables

On renvoie à [Fon94] pour plus de détails sur ces anneaux.

L'application

$$\theta : \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}^+ & \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ \sum_{n \geq 0} p^n [r_n] & \mapsto \sum_{n \geq 0} p^n r_n^{(0)} \end{cases}$$

est un morphisme surjectif de noyau  $W^1(\tilde{\mathbf{E}}^+)$  qui est un idéal principal de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  engendré par exemple par  $\omega = X/\varphi^{-1}(X)$ . On note

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_n (\tilde{\mathbf{A}}^+ \otimes \mathbb{Q}_p) / (W^1(\tilde{\mathbf{E}}^+) \otimes \mathbb{Q}_p)^n$$

le complété de  $\tilde{\mathbf{A}}^+ \otimes \mathbb{Q}_p$  pour la topologie  $W^1(\tilde{\mathbf{E}}^+)$ -adique. L'action de  $G_K$  sur  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  s'étend par continuité sur  $B_{dR}^+$ . Ce n'est toutefois pas le cas du Frobenius  $\varphi$  qui n'est pas continu pour la topologie  $W^1(\tilde{\mathbf{E}}^+)$ -adique. La série

$$\log[\varepsilon] = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n}$$

converge dans  $B_{dR}^+$  vers un élément noté  $t$ . On définit alors

$$B_{dR} = B_{dR}^+[1/t].$$

C'est le corps des fractions de  $B_{dR}^+$ . Il est encore muni d'une action de  $G_K$  pour laquelle

$$B_{dR}^{G_K} = K$$

et d'une filtration compatible, décroissante exhaustive

$$\mathrm{Fil}^k B_{dR} = t^k B_{dR}^+.$$

On définit maintenant l'anneau  $A_{cris}$  comme le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  par rapport à  $W^1(\tilde{\mathbf{E}}^+)$ , soit l'espace de séries

$$\left\{ \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\omega^n}{n!} \text{ tel que } a_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \text{ et } a_n \rightarrow 0 \text{ } p\text{-adiquement.} \right\}.$$

Cet anneau vit naturellement dans  $B_{dR}$ . De plus, la série définissant  $t$  converge encore dans  $A_{cris}$  et on pose :

$$B_{cris}^+ = A_{cris} \otimes \mathbb{Q}_p \text{ et } B_{cris} = B_{cris}^+[1/t] = A_{cris}[1/t].$$

De plus, si l'on choisit  $\tilde{p} = (p_0, p_1, \dots) \in \tilde{\mathbf{E}}$  avec  $p_0 = p$ , alors la série  $\log \frac{[\tilde{p}]}{p}$  converge dans  $B_{dR}$  vers une limite que l'on note  $\log[\tilde{p}]$  (avec la convention implicite  $\log p = 0$ ). On définit alors

$$B_{st} = B_{cris}[\log[\tilde{p}]].$$

Il s'agit encore une fois d'un sous-anneau de  $B_{dR}$ .

Tous ces anneaux, munis de la topologie  $p$ -adique, possèdent une action continue de  $G_K$ , une filtration induite par celle de  $B_{dR}$ , et un Frobenius  $\varphi$  qui étend celui de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  par continuité. On note que

$$B_{cris}^{G_K} = K_0 \quad \text{et} \quad B_{st}^{G_K} = K_0.$$

### 1.3.2 Classification des représentations de $G_K$

On appelle *représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique de  $G_K$*  tout  $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini muni d'une action linéaire et continue de  $G_K$  et *représentation  $p$ -adique de  $G_K$*  tout  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de  $G_K$ . On obtient ainsi une représentation  $p$ -adique à partir d'une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique en tensorisant par  $\mathbb{Q}_p$ .

Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors on note

$$\begin{aligned} D_{dR}(V) &:= (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{dR})^{G_K} \\ D_{st}(V) &:= (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{st})^{G_K} \\ D_{cris}(V) &:= (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris})^{G_K}. \end{aligned}$$

$D_{dR}(V)$  (respectivement  $D_{st}(V)$ ,  $D_{cris}(V)$ ) est un  $K$  (respectivement  $K_0$ ,  $K_0$ )-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de  $V$  sur  $\mathbb{Q}_p$ . On dit que  $V$  est *de de Rham* (respectivement *semi-stable*, *cristalline*) quand il y a égalité.

On voit alors que les représentations cristallines sont semi-stables et que les représentations semi-stables sont de de Rham.

De même, si  $V$  est une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique de  $G_K$ , libre sur  $\mathbb{Z}_p$ , on dit qu'elle est de de Rham, semi-stable ou cristalline si la représentation  $p$ -adique  $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  l'est.

**Exemple.** *La fausse courbe de Tate*

On définit la fausse courbe ou représentation de Tate par

$$V_{Tate} = \mathbb{Z}_p e_1 + \mathbb{Z}_p e_2$$

avec une action de  $G_K$  donnée par :

$$\begin{cases} g(e_1) = \chi(g)e_1 \\ g(e_2) = \psi(g)e_1 + e_2 \end{cases}$$

pour tout  $g \in G_K$ , où  $\chi$  est le caractère cyclotomique et  $\psi$  est défini au paragraphe 1.1. Cette représentation est une représentation semi-stable archétypique et constitue en cela une référence importante. Nous lui confronterons l'approche que nous proposons, en particulier les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules modifiés que nous allons introduire. Pour le moment notons seulement que l'action de  $G_K$  sur  $V_{Tate}$  se factorise par  $G_\infty$ . Le terme de "fausse courbe de Tate" (*false Tate curve*) provient de la similitude de ce module avec le module de Tate d'une courbe elliptique ayant réduction multiplicative déployée en  $p$ . On trouve aussi le terme d'extension de fausse courbe de Tate (*false Tate curve extension*) pour l'extension  $L/K$ .

## 1.4 Théorie de Fontaine

Si  $R$  est un anneau topologique muni d'une action linéaire et continue d'un groupe  $\Gamma$  et d'un Frobenius continu  $\varphi$  commutant à l'action de  $\Gamma$ , on appelle  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $R$  tout  $R$ -module  $M$  de type fini muni d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$  et d'une action de  $\varphi$  semi-linéaire par rapport au Frobenius, ces deux actions commutant. Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $R$  est de plus dit *étale* si l'image de  $\varphi$  engendre  $M$  en tant que  $R$ -module :

$$R\varphi(M) = M.$$

### 1.4.1 Rappel du cas classique

Il s'agit de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules introduite par Fontaine dans [Fon90].

Posons  $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{G_{K_\infty}}$ .

On définit les foncteurs

$$D : V \mapsto D(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{K_\infty}}$$

de la catégorie des représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$  vers la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur  $\mathbf{A}_K$  et

$$V : M \mapsto V(M) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_K} M)^{\varphi=1}$$

de la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}_K$  vers celle des représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$ . Le théorème suivant est dû à Fontaine ([Fon90]) :

#### **Théorème 1.1.**

*Les applications naturelles*

$$\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_K} D(V) \rightarrow \mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$$

$$\mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V(M) \rightarrow \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_K} M$$

sont des isomorphismes. En particulier,  $D$  et  $V$  sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$  et celle des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}_K$ .

**Exemple** Le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module de la fausse courbe de Tate admet une base de la forme  $(1 \otimes e_1, b \otimes e_1 + 1 \otimes e_2)$  où  $b \in \mathbf{A}_L$  vérifie  $(\tau - 1)b = -1$ . Toutefois  $V_{Tate}$  n'étant pas potentiellement cristalline (donc pas *cristabelline*), elle n'est pas, d'après un théorème de Wach (cf. [Wac96]), *de hauteur finie*, cela signifie que  $b \notin \mathbf{A}_L^+ = \mathbf{A}_L \cap \tilde{\mathbf{A}}^+$ .

Nous voulons construire un  $(\varphi, \Gamma)$ -module qui fournisse plus d'informations (qui seront alors redondantes mais plus faciles à utiliser) sur le comportement de la représentation qui lui est associée dans l'extension  $K_\pi/K$  ou sa clôture galoisienne  $L/K$ . Pour cela il s'agit d'avoir  $\Gamma = G_\infty$ .

### 1.4.2 Le cas métabélien

On suppose  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$  ou  $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}$ . Ainsi,  $\mathbf{A}'$  est un anneau de valuation  $p$ -adique, complet et stable sous les actions de  $G_K$  et de  $\varphi$ . Son corps résiduel  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$  ou  $\tilde{\mathbf{E}}$  est séparablement clos.

On note  $\mathbf{A}'_L = \mathbf{A}'^{G_L}$  ; si  $\mathbf{E}'_L = \mathbf{E}'^{G_L}$ , alors  $\mathbf{A}'_L$  est un anneau de valuation  $p$ -adique complet de corps résiduel  $\mathbf{E}'_L$ .

Pour toute représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique  $V$  de  $G_K$ , on définit  $D'_L$  par

$$D'_L(V) = (\mathbf{A}' \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_L}$$

et pour tout  $(\varphi, G_\infty)$ -module  $D$ , étale sur  $\mathbf{A}'_L$ ,  $V'_L$  par

$$V'_L(D) = (\mathbf{A}' \otimes_{\mathbf{A}'_L} D)^{\varphi=1}.$$

On note ces foncteurs  $D_L$  et  $V_L$  quand  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$  et  $\tilde{D}_L$  et  $\tilde{V}_L$  quand  $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}$ .

Remarquons que  $D'_L(V)$  et  $D(V) \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}'_L$  sont des  $(\varphi, G_\infty)$ -modules sur  $\mathbf{A}'_L$ , le second étant étale. Le théorème suivant montre qu'ils sont isomorphes et nous assure que  $D'_L$  est un bon équivalent de  $D$  dans le cas métabélien.

#### Théorème 1.2.

1. L'application naturelle

$$\iota : D(V) \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}'_L \rightarrow D'_L(V)$$

est un isomorphisme de  $(\varphi, G_\infty)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}'_L$ .

2. Les foncteurs  $D'_L$  et  $V'_L$  sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$  et la catégorie des  $(\varphi, G_\infty)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}'_L$ .

*Preuve :* Commençons par remarquer que, d'après le théorème 1.1., et par extension des scalaires, l'application naturelle

$$D(V) \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}' \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{A}'$$



est un isomorphisme.

En prenant les invariants galoisiens, on obtient un isomorphisme

$$D(V) \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}'_L = (D(V) \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}')^{G_L} \xrightarrow{\sim} (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{A}')^{G_L} = D'_L(V)$$

comme souhaité.

Nous en déduisons immédiatement que le foncteurs  $D'_L$  de la catégorie des représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$  vers la catégorie des  $(\varphi, G_\infty)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}'_L$  est exact et fidèle.

En fait, ce résultat ainsi que l'expression du quasi-inverse de  $D'_L$  (vu comme équivalence de catégorie sur son image essentielle) suffisent pour l'usage que l'on a des  $(\varphi, G_\infty)$ -modules. Ce quasi-inverse s'obtient grâce à l'isomorphisme de comparaison après extension des scalaires :

$$D'_L(V) \otimes_{\mathbf{A}'_L} \mathbf{A}' \simeq D(V) \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}' \simeq V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{A}'$$

d'où

$$V'_L(D'_L(V)) \simeq V$$

et  $V'_L$  est un quasi-inverse de  $D'_L$ .

En fait, le calcul de Fontaine (cf. [Fon90, Proposition 1.2.6.]) s'applique encore ici et on obtient que l'image essentielle est encore la catégorie des  $(\varphi, G_\infty)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}'_L$ . Pour cela, il s'agit de montrer que tout  $(\varphi, G_\infty)$ -module étale de  $p$ -torsion, qui est donc un  $\mathbf{E}'$ -espace vectoriel, possède une base  $\varphi$ -invariante, en montrant que pour toute matrice  $(a_{j,l}) \in GL_d(\mathbf{E}')$ , le système

$$x_j^p = \sum a_{j,l} x_l$$

possède  $p^d$  solutions dans  $\mathbf{E}'^d$  engendrant  $\mathbf{E}'^d$ . Le cas général s'en déduisant par dévissage et passage à la limite.  $\square$

### Corollaire 1.1.

*Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \{(\varphi, \Gamma_K) - \text{modules étales sur } \mathbf{A}_K\} & \rightarrow & \{(\varphi, G_\infty) - \text{modules étales sur } \mathbf{A}'_L\} \\ D & \mapsto & D \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}'_L \end{array}$$

*est une équivalence de catégories.*

### Exemple

Le  $(\varphi, G_\infty)$ -module associé à la fausse courbe de Tate admet la base triviale  $(1 \otimes e_1, 1 \otimes e_2)$ . Elle est donc de hauteur finie sur  $\mathbf{A}'_L$ . Il serait intéressant de savoir si cela reste vrai pour toutes les représentations semi-stables.

Quand  $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}$ , c'est une conséquence d'un résultat de Kisin ([Kis06, Lemma 2.1.10]). Il construit le  $\varphi$ -module associé à l'extension  $K_\pi$ . Il s'agit de

$$(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{A}_Y)^{\text{Gal}(\bar{K}/K_\pi)}$$

où  $\mathbf{A}_Y$  est le complété  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $W[[Y]][\frac{1}{Y}]$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Et il montre que les représentations semi-stables sont de hauteur finie dans ce cadre, c'est-à-dire que le  $W[[Y]]$ -module

$$(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} W[[Y]]^{nr})^{\text{Gal}(\bar{K}/K_\pi)},$$

avec  $W[[Y]]^{nr} = \mathbf{A}_Y \cap \tilde{\mathbf{A}}^+$ , est de même rang que  $V$ .

### 1.4.3 Remarques

#### Le corps des normes de $L/K$

Comme on l'a remarqué précédemment, l'extension  $L/K$  est arithmétiquement profinie ; on peut donc lui associer un corps des normes  $\mathbf{E}_{L/K}$  dont on connaît une description explicite. En effet, si  $k_L$  est le corps résiduel de  $L$ , alors il existe  $z \in \tilde{\mathbf{E}}$  tel que  $\mathbf{E}_{L/K}$  s'identifie à  $k_L((z)) \subset \tilde{\mathbf{E}}$ . On est alors tenté de reproduire la construction classique des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules en substituant au corps des normes de l'extension cyclotomique  $K_\infty/K$  le corps des normes  $\mathbf{E}_{L/K}$ . Toutefois, il faudrait pour cela construire un relèvement en caractéristique 0 (dans  $\tilde{\mathbf{A}}$ ) de  $\mathbf{E}_{L/K}$  stable sous les actions de  $G_K$  et de  $\varphi$ , ce que l'on ne sait faire. Ce problème est ainsi lié au fait que l'on ne sait extraire une suite cohérente en normes d'uniformisantes dans la tour d'extensions  $K(\zeta_{p^n}, \pi_{p^n})$ .

#### L'approche directe

Au lieu d'utiliser les résultats de Fontaine, on peut reprendre sa stratégie pour montrer directement le 2 du Théorème 1.2.

Pour  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ , on peut appliquer la stratégie de Fontaine exposée dans [Fon90] pour prouver que  $D_L$  est exact et fidèle.

De même, pour  $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}$ , on a encore

$$H^1(G_L, GL_d(\tilde{\mathbf{A}})) = 0$$

qui permet de conclure.

## 1.5 Cohomologie Galoisienne

### 1.5.1 Énoncé du théorème

Rappelons tout d'abord le cas classique. Soit  $D(V)$  le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale sur  $\mathbf{A}_K$  associé à une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique  $V$ . Fixons  $\gamma$  un générateur topologique de

$\Gamma_K$ . Herr introduit dans [Her98] le complexe

$$0 \longrightarrow D(V) \xrightarrow{f_1} D(V) \oplus D(V) \xrightarrow{f_2} D(V) \longrightarrow 0$$

avec les applications

$$f_1 = \begin{pmatrix} \varphi - 1 \\ \gamma - 1 \end{pmatrix} \text{ et } f_2 = (\gamma - 1, 1 - \varphi).$$

Il montre alors que l'homologie de ce complexe s'identifie fonctoriellement à la cohomologie galoisienne de la représentation  $V$ .

Cette identification est donnée explicitement dans [CC99] et [Ben00] pour le premier groupe de cohomologie par l'association de la classe d'un couple  $(x, y)$  d'éléments de  $D(V)$  vérifiant  $(\gamma - 1)x = (\varphi - 1)y$  à la classe du cocycle

$$\sigma \mapsto -(\sigma - 1)b + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1}y$$

où  $b \in V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{A}$  est solution de  $(\varphi - 1)b = x$  et  $\sigma|_{\Gamma_K} = \gamma^n$  pour un  $n \in \mathbb{Z}_p$ .

Nous allons montrer qu'il existe encore un tel complexe dans le cas métabélien. Toutefois, pour tenir compte du fait que  $G_\infty$  possède maintenant deux générateurs, nous devons le modifier et l'allonger quelque peu.

Si on se donne un  $(\varphi, G_\infty)$ -module étale  $M$  sur  $\mathbf{A}'_L$ , on lui associe le complexe à quatre termes  $C_{\varphi, \gamma, \tau}(M)$  :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} M \oplus M \oplus M \xrightarrow{\beta} M \oplus M \oplus M \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0$$

où

$$\alpha = \begin{pmatrix} \varphi - 1 \\ \gamma - 1 \\ \tau - 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 1 - \varphi & 0 \\ \tau - 1 & 0 & 1 - \varphi \\ 0 & \tau^{\chi(\gamma)} - 1 & \delta - \gamma \end{pmatrix}, \eta = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1, \delta - \gamma, \varphi - 1)$$

avec  $\delta = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)(\tau - 1)^{-1} \in \mathbb{Z}_p[[\tau - 1]]$  défini ainsi : on pose

$$\binom{u}{n} = \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} \in \mathbb{Z}_p \text{ pour tout } u \in \mathbb{Z}_p \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors :

$$\tau^{\chi(\gamma)} = \sum_{n \geq 0} \binom{\chi(\gamma)}{n} (\tau - 1)^n$$

car  $\tau^{p^n}$  converge vers 1 dans  $G_\infty$ , donc  $\tau - 1$  est topologiquement nilpotent dans  $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ . Ainsi

$$\delta = \frac{\tau^{\chi(\gamma)} - 1}{\tau - 1} = \sum_{n \geq 1} \binom{\chi(\gamma)}{n} (\tau - 1)^{n-1}.$$

Le but de ce paragraphe est de montrer le :

**Théorème 1.3.**

Soit  $V$  une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique de  $G_K$ .

- i) L'homologie du complexe  $C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))$  s'identifie canoniquement et fonctoriellement à la cohomologie galoisienne (continue) de  $V$ .
- ii) De manière explicite, si  $(x, y, z) \in Z^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V)))$ , soit  $b$  une solution dans  $V \otimes \mathbf{A}'$  de

$$(\varphi - 1)b = x,$$

alors l'identification associe à la classe du triplet  $(x, y, z)$  la classe du cocycle :

$$c : \sigma \mapsto c_\sigma = -(\sigma - 1)b + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} z + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} y$$

$$\text{où } \sigma|_{G_\infty} = \gamma^n \tau^m.$$

**1.5.2 Démonstration de i)**

Le foncteur  $F^\bullet$  qui à une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique  $V$  associe l'homologie du complexe  $C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))$  est un foncteur cohomologique coïncidant en degré 0 avec la cohomologie galoisienne continue de  $V$  :

$$H^0(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))) = D_L(V)_{\varphi=1, \gamma=1, \tau=1} = V^{G_K}.$$

Il s'agit donc de montrer qu'il est effaçable. Pour cela, on veut travailler dans une catégorie possédant suffisamment d'injectifs et plonger  $V$  dans un injectif explicite : son module induit que l'on sait même cohomologiquement trivial. Or la catégorie des représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$  n'admet pas de module induit. On doit donc travailler modulo  $p^r$  à  $r$  fixé, même dans la catégorie des limites inductives de représentations de  $p^r$ -torsion puis déduire le résultat par passage à la limite. Il s'agit alors de montrer que l'homologie du complexe associé à un module induit se concentre en degré 0, ce qui montre *a fortiori* l'effaçabilité de  $F^\bullet$ . Mais nous allons écrire cela de manière explicite, ce qui permettra d'obtenir la deuxième partie du théorème, et, dans le paragraphe suivant, de décrire le cup-produit en termes du complexe de Herr.

Introduisons  $M_{G_K, p^r\text{-tor}}$  la catégorie des  $G_K$ -modules discrets de  $p^r$ -torsion, il s'agit encore de la catégorie des limites inductives de  $G_K$ -modules finis de  $p^r$ -torsion ou encore de la catégorie des  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}[[G_K]]$ -modules discrets. On remarque que le foncteur  $D_L$  se prolonge en une équivalence de catégories de cette catégorie vers la catégorie des limites inductives de  $(\varphi, G_\infty)$ -modules étales sur  $\mathbf{A}'_L$  de  $p^r$ -torsion.

Notons enfin que cette catégorie est stable par passage au module induit :

**Lemme 1.2.**

Si  $V$  est un objet de  $M_{G_K, p^r\text{-tor}}$  alors, on définit le module induit<sup>1</sup> associé à  $V$  par

$$\text{Ind}_{G_K}(V) := \mathcal{F}_{\text{cont}}(G_K, V)$$

<sup>1</sup>Dans [Ser68], Serre appelle ce module le module coinduit, le terme de module induit désignant  $X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[G_K]]$  pour  $X$  un  $\mathbb{Z}_p$ -module (de type fini). Il se ravise dans [Ser94] où il n'y a plus que des modules induits. Comme ici il n'y a pas de risque de confusion, nous optons pour cette terminologie.

l'ensemble des applications continues de  $G_K$  dans  $V$ .

On munit  $\text{Ind}_{G_K}(V)$  de la topologie discrète et de l'action de  $G_K$  :

$$\begin{aligned} G_K \times \text{Ind}_{G_K}(V) &\rightarrow \text{Ind}_{G_K}(V) \\ g \cdot \eta &= [x \mapsto \eta(x.g)]. \end{aligned}$$

Alors  $\text{Ind}_{G_K}(V)$  est encore un objet de  $M_{G_K, p^r\text{-tor}}$  et  $V$  s'injecte canoniquement dans  $\text{Ind}_{G_K}(V)$ .

*Preuve* : Il s'agit de montrer que l'action de  $G_K$  est continue, soit que pour tout  $\eta \in \text{Ind}_{G_K}(V)$ , le sous-groupe

$$U := \{g \in G_K \mid g \cdot \eta = \eta\}$$

est ouvert dans  $G_K$ .

On remarque que, puisque  $\eta$  est continu à valeurs dans  $V$  discret, elle est localement constante ; cette condition est même équivalente à la continuité puisqu'une application localement constante est toujours continue. De plus, comme  $G_K$  est compact,  $\eta$  prend un ensemble fini de valeurs  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Posons alors pour  $1 \leq i \leq m$ ,

$$U_i = \eta^{-1}(v_i).$$

Alors  $U_i$  est ouvert et  $U$  peut être écrit sous la forme :

$$U = \{g \in G_K \mid \forall 1 \leq i \leq m \ U_i g = U_i\} = \bigcap_{i=1}^m \{g \in G_K \mid U_i g = U_i\}$$

Il suffit donc de montrer que chacun des  $V_i = \{g \in G \mid U_i g = U_i\}$  est ouvert.

Remarquons que pour tout  $x \in U_i$ ,  $x^{-1}U_i$  est un ouvert de  $G_K$  contenant 1. Or 1 admet une base de voisinages formée de sous-groupes ouverts distingués, ainsi il existe un tel sous-groupe  $W_x \subset x^{-1}U_i$  et

$$U_i = \bigcup_{x \in U_i} xW_x.$$

Mais les  $xW_x$  sont ouverts et  $U_i$  est le complémentaire de  $\bigcup_{j \neq i} U_j$ , il est ainsi fermé dans  $G_K$  donc compact. On extrait un sous-recouvrement fini de  $U_i$  :

$$U_i = \bigcup_{j=1}^n x_j W_j.$$

où les  $W_j$  sont donc des sous-groupes ouverts normaux de  $G_K$ . Posons maintenant

$$W = \bigcap_{j=1}^n W_j$$

alors  $W$  est encore un sous-groupe ouvert normal de  $G_K$  et même de chacun des  $W_j$  qui s'expriment donc comme réunion disjointe d'ouverts de la forme  $yW$ , si bien qu'il existe  $y_k \in U_i$ ,  $1 \leq k \leq r$  tels que

$$U_i = \bigsqcup_{k=1}^r y_k W.$$

Mais alors le sous-groupe  $V_i$  contient le sous-groupe ouvert  $W$  et est donc lui-même ouvert dans  $G_K$ . Cela montre que l'action de  $G_K$  est continue et donc que  $\text{Ind}_{G_K}(V)$  est un objet de  $M_{G_K, p^r\text{-tor}}$ .

Enfin, l'injection de  $V$  dans son module induit est donné par l'application de  $v \in V$  sur  $\eta_v \in \text{Ind}_{G_K}(V)$  telle que

$$\forall g \in G_K \quad \eta_v(g) = g(v).$$

□

Si l'on note  $F^i$  le foncteur composé  $H^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(-)))$ , le lemme du serpent donne pour toute suite exacte courte de  $M_{G_K, p^r\text{-tor}}$

$$0 \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow V' \rightarrow 0$$

une suite exacte longue

$$0 \rightarrow F^0(V) \rightarrow F^0(V'') \rightarrow F^0(V') \rightarrow F^1(V) \rightarrow F^1(V'') \rightarrow \dots$$

ce qui montre que  $F^\bullet$  est un foncteur cohomologique.

Le but est de montrer qu'elle coïncide avec la suite exacte longue de cohomologie quand  $V'' = \text{Ind}_{G_K}(V)$ . Or dans ce cas on a le résultat suivant :

**Proposition 1.1.**

Si  $U = \text{Ind}_{G_K}(V)$  est un module induit de la catégorie  $M_{G_K, p^r\text{-tor}}$ , alors

$$F^i(U) = H^i(K, U) = 0 \text{ pour tout } i > 0.$$

Montrons tout d'abord comment le résultat se déduit de cette proposition. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F^0(V) & \longrightarrow & F^0(\text{Ind}_{G_K}(V)) & \longrightarrow & F^0(V') & \longrightarrow & F^1(V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(K, V) & \longrightarrow & H^0(K, \text{Ind}_{G_K}(V)) & \longrightarrow & H^0(K, V') & \longrightarrow & H^1(K, V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre que  $H^1(K, V) \simeq F^1(V)$ .

Et en dimension supérieure, les nullités des  $F^i(\text{Ind}_{G_K}(V))$  et des  $H^i(K, \text{Ind}_{G_K}(V))$  montrent qu'on a à la fois  $F^k(V') = F^{k+1}(V)$  et  $H^k(K, V') = H^{k+1}(K, V)$ . Et donc

par récurrence, on obtient bien que  $F^i(V) = H^i(K, V)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout module  $V$  de  $M_{G_K, p^r\text{-tor}}$ .

*Preuve de la proposition :*

Commençons par montrer le côté cohomologie galoisienne. Il s'agit d'un résultat classique (cf. [Ser68, Ser94]) : ici il faut seulement prendre garde aux catégories dans lesquelles vivent nos objets. Ainsi, on utilise l'isomorphisme (cf. [NSW00, p. 231]) :

$$H^i(G_K, N) \simeq \mathcal{E}xt_{G_K}^i(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, N)$$

pour tout  $i \geq 0$  et tout  $N \in M_{G_K, p^r\text{-tor}}$ , où  $\mathcal{E}xt_{G_K}^i(-, -)$  est le  $i$ -ème foncteur dérivé du bifoncteur

$$\mathcal{H}om_{G_K} : \mathcal{C}' \times M_{G_K, p^r\text{-tor}} \rightarrow (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}\text{-modules discrets})$$

avec  $\mathcal{C}'$  la catégorie des  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}[[G_K]]$ -modules compacts, une catégorie qui possède suffisamment de projectifs. On peut donc calculer  $H^i(G_K, N)$  à l'aide d'une résolution projective

$$\cdots \rightarrow K_n \rightarrow K_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$  dans  $\mathcal{C}'$ . Il s'agit donc de considérer l'homologie du complexe

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}[[G_K]]}(K_n, \text{Ind}_{G_K}(V)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}[[G_K]]}(K_{n+1}, \text{Ind}_{G_K}(V)) \rightarrow \cdots$$

Or  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}[[G_K]]}(K_n, \text{Ind}_{G_K}(V)) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}}(K_n, V)$  et les  $K_i$  restent projectifs dans la catégorie des  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ -modules. Ainsi on obtient

$$H^i(G_K, \text{Ind}_{G_K}(V)) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}[[G_K]]}^i(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, \text{Ind}_{G_K}(V)) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, V) = 0$$

pour  $i \geq 1$ , comme désiré.

**Remarque** Cette propriété reste vraie si l'on remplace  $G_K$  par n'importe quel groupe profini.

Pour la fin de la preuve, nous allons utiliser le

**Lemme 1.3.**

Pour tout  $V \in M_{G_K, p^r\text{-tor}}$ , on dispose de la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_{G_\infty}(V) \longrightarrow D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)) \xrightarrow{\varphi-1} D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)) \longrightarrow 0.$$

De plus, pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ , on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_{\Gamma_K}(V) \longrightarrow \text{Ind}_{G_\infty}(V) \xrightarrow{\tau^\alpha-1} \text{Ind}_{G_\infty}(V) \longrightarrow 0.$$

Enfin, on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V^{G_K} \longrightarrow \text{Ind}_{\Gamma_K}(V) \xrightarrow{\gamma-1} \text{Ind}_{\Gamma_K}(V) \longrightarrow 0.$$

*Preuve du Lemme :* On part de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbf{A}' \xrightarrow{\varphi-1} \mathbf{A}' \longrightarrow 0$$

que l'on tensorise par  $\text{Ind}_{G_K}(V)$ . Du fait de l'existence d'une section continue de  $\varphi - 1$  (cf. [Sch06]), en prenant les invariants galoisiens, on obtient une suite exacte longue commençant par

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_{G_K}(V)^{G_L} \longrightarrow D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)) \xrightarrow{\varphi-1} D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)) \longrightarrow H^1(L, \text{Ind}_{G_K}(V))$$

Le noyau est donné par  $\text{Ind}_{G_K}(V)^{G_L} = \text{Ind}_{G_\infty}(V)$ .

Il reste à montrer la nullité de  $H^1(G_L, \text{Ind}_{G_K}(V))$ . Pour cela, on remarque ceci (cf. [Ser94, Chapitre I, Proposition 8]) :

$$H^1(G_L, \text{Ind}_{G_K}(V)) = \varinjlim H^1(G_M, \text{Ind}_{G_K}(V))$$

où la limite inductive est prise sur l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies  $M$  de  $L/K$ . En effet, les sous-groupes de Galois  $G_M$  de  $G_K$  forment, pour l'inclusion, un système projectif de limite

$$\varprojlim G_M = \bigcap G_M = G_L$$

et ce système est compatible avec le système inductif formé par les  $G_M$ -module par restriction  $\text{Ind}_{G_K}(V)$  dont la limite est le  $G_L$ -module par restriction  $\text{Ind}_{G_K}(V)$ .

Le lemme se ramène donc à montrer que pour toute extension finie galoisienne  $M/K$  incluse dans  $L$ , on a  $H^1(G_M, \text{Ind}_{G_K}(V)) = 0$ .

Or, comme  $G_M$  est ouvert dans  $G_K$ , on a une décomposition

$$G_K = \bigcup_{\bar{g} \in \text{Gal}(M/K)} gG_M$$

et on en déduit que, en tant que  $G_M$ -module,  $\text{Ind}_{G_K}(V)$  admet la décomposition en somme directe

$$\text{Ind}_{G_K}(V) = \bigoplus_{\bar{g} \in \text{Gal}(M/K)} \mathcal{F}_{\text{cont}}(gG_M, V) \simeq \bigoplus_{\text{Gal}(M/K)} \text{Ind}_{G_M}(V).$$

D'où il vient

$$H^1(G_M, \text{Ind}_{G_K}(V)) \simeq \bigoplus_{\text{Gal}(M/K)} H^1(G_M, \text{Ind}_{G_M}(V))$$

et chacun des  $H^1(G_M, \text{Ind}_{G_M}(V))$  est nul, comme il a été montré dans la première partie de la proposition.

Par ailleurs,  $\tau^\alpha$  engendre topologiquement  $\text{Gal}(L/K_\infty)$ , si bien que le complexe

$$\text{Ind}_{G_\infty}(V) \xrightarrow{\tau^\alpha-1} \text{Ind}_{G_\infty}(V)$$



calcule la cohomologie  $H^\bullet(\text{Gal}(L/K_\infty), \text{Ind}_{G_\infty}(V))$ . On obtient pour noyau

$$\text{Ind}_{G_\infty}(V)^{\text{Gal}(L/K_\infty)} \simeq \text{Ind}_{\Gamma_K}(V).$$

Et la nullité de  $H^1(\text{Gal}(L/K_\infty), \text{Ind}_{G_\infty}(V))$  se montre de même que ci-dessus celle de  $H^1(G_L, \text{Ind}_{G_K}(V))$ .

Enfin, le complexe

$$\text{Ind}_{\Gamma_K}(V) \xrightarrow{\gamma-1} \text{Ind}_{\Gamma_K}(V)$$

calcule la cohomologie  $H^\bullet(\Gamma_K, \text{Ind}_{\Gamma_K}(V))$ . La surjectivité de  $\gamma - 1$  provient encore de la nullité de  $H^1(\Gamma_K, \text{Ind}_{\Gamma_K}(V))$  que l'on montre comme précédemment.  $\diamond$

De la surjectivité de  $(\varphi - 1)$  sur  $D_L(U)$ , on déduit immédiatement que  $F^3(U) = 0$ . On obtient aussi le noyau de  $\eta$  :

$$\text{Ker } \eta = \{(x, y, z); x, y \in D_L(U) \text{ et } z \in (1 - \varphi)^{-1}((\tau^{\chi(\gamma)} - 1)(x) + (\delta - \gamma)(y))\}.$$

Soient donc  $x, y \in D_L(U)$  et fixons  $x', y' \in D_L(U)$  tels que

$$(1 - \varphi)(x') = x \text{ et } (1 - \varphi)(y') = y ;$$

montrer que  $F^2(U) = 0$  revient à montrer que

$$\forall u \in \text{Ind}_{G_\infty}(V), (x, y, (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)(x') + (\delta - \gamma)(y') + u \otimes 1) \in \text{Im } \beta.$$

Or  $(\tau^{\chi(\gamma)} - 1)$  est surjectif sur  $\text{Ind}_{G_\infty}(V)$ , il suffit donc de considérer  $\beta(0, x' + u', y')$  avec  $u'$  choisi de sorte que  $(\tau^{\chi(\gamma)} - 1)(u') = u$ .

Soit maintenant  $(u, v, w) \in \text{Ker}(\beta)$ , i.e. vérifiant :

$$\begin{cases} (\gamma - 1)u = (\varphi - 1)v \\ (\tau - 1)u = (\varphi - 1)w \\ (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)v = (\gamma - \delta)w \end{cases}$$

Fixons  $x_0 \in D_L(U)$  tel que  $(\varphi - 1)x_0 = u$ . Alors les deux premières relations montrent que

$$v_0 := v - (\gamma - 1)x_0 \text{ et } w_0 := w - (\tau - 1)x_0$$

sont dans le noyau de  $\varphi - 1$  donc dans  $\text{Ind}_{G_\infty}(V)$ , et vérifient de plus :

$$(\tau^{\chi(\gamma)} - 1)v_0 = (\gamma - \delta)w_0.$$

On choisit maintenant  $\eta \in \text{Ind}_{G_\infty}(V)$  tel que  $(\tau - 1)\eta = w_0$ . Alors

$$(\tau^{\chi(\gamma)} - 1)(\gamma - 1)\eta = (\gamma - \delta)(\tau - 1)\eta = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)v_0$$

si bien que  $v_0 - (\gamma - 1)\eta \in \text{Ind}_{\Gamma_K}(V)$  et il existe donc  $\varepsilon \in \text{Ind}_{\Gamma_K}(V)$  tel que

$$(\gamma - 1)\varepsilon = v_0 - (\gamma - 1)\eta$$

si bien que

$$(\gamma - 1)(\eta + \varepsilon) = v_0$$

et

$$(\tau - 1)(\eta + \varepsilon) = w_0.$$

On définit alors  $x := x_0 + \eta + \varepsilon$  et on vérifie que  $\alpha(x) = (u, v, w)$  :

$$\begin{aligned} (\varphi - 1)x &= (\varphi - 1)x_0 + (\varphi - 1)(\eta + \varepsilon) = (\varphi - 1)x_0 = u \\ (\gamma - 1)x &= (\gamma - 1)x_0 + (\gamma - 1)(\eta + \varepsilon) = v - v_0 + v_0 = v \\ (\tau - 1)x &= (\tau - 1)x_0 + (\tau - 1)(\eta + \varepsilon) = w - w_0 + w_0 = w \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

### 1.5.3 Formules explicites

#### Démonstration de ii)

Pour expliciter l'isomorphisme, il suffit de faire une chasse au diagramme en suivant le lemme du serpent : si

$$(x, y, z) \in Z^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))),$$

alors par l'injection  $D_L(V) \hookrightarrow D_L(\text{Ind}_{G_K}(V))$ , on peut voir

$$(x, y, z) \in Z^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)))).$$

De la nullité de  $H^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(\text{Ind}_{G_K}(V))))$  on déduit qu'il existe  $b' \in D_L(\text{Ind}_{G_K}(V))$  tel que

$$\alpha(b') = (x, y, z).$$

Si maintenant l'on considère  $\bar{b}' \in D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)/V)$  la réduction de  $b'$  modulo  $D_L(V)$ , alors

$$\bar{b}' \in H^0(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)/V))) = (\text{Ind}_{G_K}(V)/V)^{G_K}.$$

Donc, si  $\tilde{b} \in \text{Ind}_{G_K}(V)$  relève  $\bar{b}'$ , l'image de la classe de  $(x, y, z)$  dans  $H^1(K, V)$  est la classe du cocycle

$$c : \sigma \mapsto c_\sigma = (\sigma - 1)\tilde{b}.$$

Or on peut choisir  $\tilde{b} = b' - b$ . En effet

$$(\varphi - 1)(b' - b) = x - x = 0$$

donc  $b' - b \in \text{Ind}_{G_K}(V)$  et donc  $b' - b$  relève  $\bar{b}'$ . Ainsi si

$$\sigma|_{G_\infty} = \gamma^n \tau^m,$$

on peut écrire

$$c_\sigma = (\sigma - 1)(b' - b) = -(\sigma - 1)(b) + (\gamma^n \tau^m - 1)b' = -(\sigma - 1)b + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} z + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} y$$

ce qui achève la preuve du théorème.

Montrons enfin comment on passe à la limite pour obtenir le résultat dans le cas d'une représentation qui n'est plus nécessairement de torsion. Soit  $V$  une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique de  $G_K$  ; pour tout  $r \geq 1$ ,

$$V_r = V \otimes \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$$

est une représentation de  $p^r$ -torsion telle que

$$V = \varprojlim V_r.$$

Alors on sait que la cohomologie continue de  $V$  s'exprime comme la limite :

$$\forall i \geq 0, H^i(K, V) = \varprojlim H^i(K, V_r) = \varprojlim F^i(V_r).$$

Il suffit donc de montrer

$$\forall i \geq 0, F^i(V) = \varprojlim F^i(V_r).$$

Notons  $H_r^i$  (respectivement  $B_r^i, Z_r^i$ ) pour le groupe d'homologie  $H^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V_r)))$  (respectivement  $B^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V_r)))$ ,  $Z^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V_r)))$ ). Les applications du complexe de Herr sont  $\mathbb{Z}_p$ -linéaires si bien que l'on a dans la catégorie des  $\mathbb{Z}_p$ -modules la suite exacte

$$0 \rightarrow B_r^i \rightarrow Z_r^i \rightarrow H_r^i \rightarrow 0$$

d'où l'on tire la suite exacte

$$0 \rightarrow \varprojlim B_r^i \rightarrow \varprojlim Z_r^i \rightarrow \varprojlim H_r^i \rightarrow \varprojlim^1 B_r^i$$

où  $\varprojlim^1$  est le premier foncteur dérivé du foncteur  $\varprojlim$ . Or pour tout  $r$ ,

$$B_r^i \simeq B^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))) \otimes \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$$

si bien que les applications de transition dans le système projectif  $(B_r^i)$  sont surjectives, et donc ce système vérifie les conditions de Mittag-Leffler. On en déduit que

$$\varprojlim^1 B_r^i = 0$$

ce qui montre que l'homologie de la limite projective est égale à la limite projective de l'homologie, comme voulu.

### Formule explicite pour $H^2$

On peut de même expliciter l'isomorphisme entre  $H^2(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V)))$  et  $H^2(K, V)$  :

**Proposition 1.2.**

L'identification du Théorème 1.3. entre l'homologie du complexe  $C_{\varphi,\gamma,\tau}(D_L(V))$  et la cohomologie galoisienne de  $V$  associe à un triplet  $(a, b, c) \in Z^2(C_{\varphi,\gamma,\tau}(D_L(V)))$  la classe du 2-cocycle :

$$(g, h) \mapsto s_g - s_{gh} + gs_h + \gamma^{n_1} \frac{\tau^{m_1} - 1}{\tau - 1} \frac{(\delta^{-1}\gamma)^{n_2} - 1}{\delta^{-1}\gamma - 1} \delta^{-1}c$$

où  $g|_{G_\infty} = \gamma^{n_1}\tau^{m_1}$ ,  $h|_{G_\infty} = \gamma^{n_2}\tau^{m_2}$  et  $s$  est une application  $G_K \rightarrow \mathbf{A}' \otimes V$  telle que

$$s_\sigma = \phi \left( \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} a + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} b \right)$$

où  $\sigma|_{G_\infty} = \gamma^n \tau^m$  et  $\phi$  est une section continue de  $\varphi - 1$ .

*Preuve :* Soit

$$\alpha = (a, b, c) \in Z^2(C_{\varphi,\gamma,\tau}(D_L(V))).$$

On peut alors, grâce à l'injection  $V \hookrightarrow \text{Ind}_{G_K}(V)$ , considérer que

$$\alpha \in Z^2(C_{\varphi,\gamma,\tau}(D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)))).$$

Par la nullité de  $H^2(C_{\varphi,\gamma,\tau}(D_L(\text{Ind}_{G_K}(V))))$ , il s'agit d'un cobord, *i.e.*, il existe

$$\beta = (\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in D_L(\text{Ind}_{G_K}(V))^3$$

tels que

$$\begin{cases} a = (\gamma - 1)\eta_x - (\varphi - 1)\eta_y \\ b = (\tau - 1)\eta_x - (\varphi - 1)\eta_z \\ c = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)\eta_x - (\gamma - \delta)\eta_y \end{cases}$$

Alors il correspond à la classe de la réduction  $\bar{\beta}$  de  $\beta$  dans  $D_L(\text{Ind}_{G_K}(V)/V)^3$  un élément de  $H^1(K, \text{Ind}_{G_K}(V)/V)$ . Son image dans  $H^2(K, V)$  est l'élément correspondant à  $\alpha$ . Calculons-le donc.

Soit  $\eta_b \in A \otimes \text{Ind}_{G_K}(V)$  tel que  $(\varphi - 1)\eta_b = \eta_x$ , alors pour  $\sigma|_{G_\infty} = \gamma^n \tau^m$ ,

$$c_\sigma = -(\sigma - 1)\eta_b + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} \eta_z + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} \eta_y$$

est un cocycle à valeurs dans  $\text{Ind}_{G_K}(V) + \mathbf{A}' \otimes V$  dont la réduction modulo  $\mathbf{A}' \otimes V$  est un cocycle correspondant à  $\bar{\beta}$ . Fixons  $\sigma$  et calculons

$$\begin{aligned} (\varphi - 1)r_\sigma &= -(\sigma - 1)(\varphi - 1)\eta_b + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} (\varphi - 1)\eta_z + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} (\varphi - 1)\eta_y \\ &= -(\gamma^n \tau^m - 1)\eta_x + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} ((\tau - 1)\eta_x - b) + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} ((\gamma - 1)\eta_x - a) \\ &= -\frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} a - \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} b =: -\tilde{s}_\sigma \end{aligned}$$

Choisissons alors une section  $\phi$  de  $\varphi - 1$  et définissons l'application  $s : G_K \rightarrow A \otimes V$  par

$$s = \phi \circ \tilde{s}.$$

Ainsi,  $(\varphi - 1)s = \tilde{s}$ . Ce choix est unique modulo  $\mathcal{F}_{cont}(G_K, V)$ . Alors,  $r + s : G_K \rightarrow \text{Ind}_{G_K}(V)$  est un relèvement d'un cocycle correspondant à  $\bar{\beta}$ . Son image par la différentielle est à valeurs dans  $V$  et est le 2-cocycle recherché. Il s'écrit

$$d(r + s)(g, h) = r_g + s_g - r_{gh} - s_{gh} + gr_h + gs_h$$

Calculons la partie provenant de  $r$ , de manière évidente on a pour  $g|_{G_\infty} = \gamma^{n_1} \tau^{m_1}$  et  $h|_{G_\infty} = \gamma^{n_2} \tau^{m_2}$  :

$$r_g - r_{gh} + gr_h = \gamma^{n_1} (\tau^{m_1} - 1) \frac{\gamma^{n_2} - 1}{\gamma - 1} \eta_y + \gamma^{n_1} \left( \frac{\tau^{m_1} - 1}{\tau - 1} - \gamma^{n_2} \frac{\tau^{\chi(\gamma)^{-n_2} m_1} - 1}{\tau - 1} \right) \eta_z$$

Or on remarque d'une part que :

$$(\tau - 1) \frac{\gamma^{n_2} - 1}{\gamma - 1} = \frac{(\delta^{-1} \gamma)^{n_2} - 1}{\delta^{-1} \gamma - 1} (\tau - 1)$$

et d'autre part que :

$$\gamma^{n_2} \frac{\tau^{\chi(\gamma)^{-n_2} m_1} - 1}{\tau - 1} = \frac{\tau^{m_1} - 1}{\tau - 1} (\delta^{-1} \gamma)^{n_2}$$

si bien que

$$\begin{aligned} r_g - r_{gh} + gr_h &= \gamma^{n_1} \frac{\tau^{m_1} - 1}{\tau - 1} \frac{(\delta^{-1} \gamma)^{n_2} - 1}{\delta^{-1} \gamma - 1} ((\tau - 1) \eta_y + \delta^{-1} (\delta - \gamma) \eta_z) \\ &= \gamma^{n_1} \frac{\tau^{m_1} - 1}{\tau - 1} \frac{(\delta^{-1} \gamma)^{n_2} - 1}{\delta^{-1} \gamma - 1} \delta^{-1} c. \end{aligned}$$

### Remarque

Dans le cas du complexe de Herr classique, on associe à la classe de  $a$  celle du 2-cocycle :

$$(g_1, g_2) \mapsto \tilde{\gamma}^{n_1} (h - 1) \frac{\tilde{\gamma}^{n_2} - 1}{\tilde{\gamma} - 1} \tilde{a}$$

où  $(\varphi - 1)\tilde{a} = a$ ,  $\tilde{\gamma}$  est un relèvement fixé de  $\gamma$  dans  $G_K$  et  $g_1 = \tilde{\gamma}^{n_1} h$ ,  $g_2 = \tilde{\gamma}^{n_2} h'$  avec  $h, h' \in G_{K_\infty}$  et  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_p$ .

#### 1.5.4 Une démonstration alternative

On peut aussi déduire la première partie du Théorème 1.3. ci-dessus à partir du théorème de Herr sur le complexe en les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules. Rappelons que l'on note  $\mathbf{A}_L = \mathbf{A}^{G_L}$  où  $\mathbf{A}$  est l'anneau de Fontaine usuel. On note  $M' = M \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}_L$  et on considère la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{\varphi, \gamma}(M) \longrightarrow \mathcal{C}_{\varphi, \gamma}(M') \longrightarrow \mathcal{C}'_{\varphi, \gamma}(M') \longrightarrow 0$$

qui s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\tau-1} & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha_0 \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M \oplus M & \longrightarrow & M' \oplus M' & \xrightarrow{(\tau-1, \tau^{\chi(\gamma)}-1)} & M' \oplus M' \longrightarrow 0 \\
 & & \beta_0 \downarrow & & \beta_0 \downarrow & & \beta_1 \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\tau^{\chi(\gamma)}-1} & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où le complexe  $\mathcal{C}_{\varphi, \gamma}(M)$  est le complexe de Herr classique avec donc

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} \varphi - 1, \gamma - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \beta_0 = \begin{pmatrix} \gamma - 1 \\ 1 - \varphi \end{pmatrix}$$

et où le complexe  $\mathcal{C}'_{\varphi, \gamma}(M')$  est le complexe de Herr modifié par

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \varphi - 1, \gamma - \delta \end{pmatrix} \text{ et } \beta_1 = \begin{pmatrix} \gamma - \delta \\ 1 - \varphi \end{pmatrix}.$$

L'équation

$$(\gamma - \delta)(\tau - 1) = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)(\gamma - 1)$$

montre que l'on a bien défini un complexe de complexes. Si maintenant on prend  $M = D(V)$ , le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module associé à la représentation  $V$ , la dernière remarque du paragraphe 1.4.3 montre qu'il s'agit d'une suite exacte de complexes. Mais alors, l'homologie de  $\mathcal{C}_{\varphi, \gamma}(M)$  s'identifie à l'homologie du complexe total associé à l'application  $\mathcal{C}_{\varphi, \gamma}(M') \longrightarrow \mathcal{C}'_{\varphi, \gamma}(M')$ . Ce complexe total est le complexe  $\mathcal{C}_{\varphi, \gamma, \tau}(D(V) \otimes_{\mathbf{A}_K} \mathbf{A}_L)$ . Ceci montre donc le Théorème 1.3. lorsque  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ .

On va maintenant considérer le cas  $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}$  et montrer que l'injection de complexes

$$C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V)) \hookrightarrow C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V) \otimes_{\mathbf{A}_L} \tilde{\mathbf{A}}_L)$$

est un quasi-isomorphisme, ce qui permet de conclure.

En degré 0, ceci est immédiat. En degré supérieur, il s'agit de montrer que l'application naturelle

$$H^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))) \xrightarrow{\text{nat}} H^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V) \otimes_{\mathbf{A}_L} \tilde{\mathbf{A}}_L))$$

est un isomorphisme.

Notons  $Z^i$  pour  $Z^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V)))$  et  $\tilde{Z}^i$  pour  $Z^i(C_{\varphi, \gamma, \tau}(\tilde{D}_L(V)))$ ; de même, on adoptera les notations  $B^i$  et  $\tilde{B}^i$ .

Il s'agit donc de montrer pour tout  $1 \leq i \leq 3$ ,

$$\tilde{B}^i \cap Z^i = B^i \quad (1.1)$$

$$\tilde{Z}^i = Z^i + \tilde{B}^i \quad (1.2)$$

En effet, 1.1 montre l'injectivité de nat, et 1.2 la surjectivité.

On commence par remarquer ceci : si  $b \in \tilde{D}_L(V)$  vérifie  $(\varphi - 1)b \in D_L(V)$  alors  $b \in D_L(V)$ . Ceci provient du fait que  $\varphi - 1 : V \otimes \mathbf{A} \rightarrow V \otimes \mathbf{A}$  est surjectif, et que le noyau de  $\varphi - 1 : V \otimes \tilde{\mathbf{A}} \rightarrow V \otimes \tilde{\mathbf{A}}$  est  $V \subset V \otimes \mathbf{A}$ .

Cette remarque nous permet d'ores et déjà de traiter l'équation 1.1 en degré 1 :

soit  $(x, y, z) \in \tilde{B}^1 \cap Z^1$  alors, il existe  $b \in \tilde{D}_L(V)$  tel que

$$(x, y, z) = \alpha(b)$$

d'où  $(\varphi - 1)b = x \in D_L(V)$ , ainsi  $b \in D_L(V)$  et  $(x, y, z) \in B^1$ .

Pour le reste, on va encore raisonner modulo  $p^r$ , le passage à la limite se faisant comme précédemment. La topologie coïncide alors avec la topologie  $v_{\mathbf{E}}$ -adique. On utilise maintenant le fait que  $\tilde{\mathbf{E}}_L$  est le complété de la clôture radicielle de  $\mathbf{E}_L$ . Alors pour  $u \in D_L(V)$  et  $a \in \tilde{\mathbf{A}}_L/(p^r)$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \varphi^{-n}(\tilde{\mathbf{A}}_L/(p^r))$  tels que

$$(a - \alpha)u \in (V \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))^{G_L}/(p^r)$$

si bien que

$$\varphi^n(au) \in D_L(V) + (V \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))^{G_L}/(p^r).$$

Ceci montre que

$$\forall x \in \tilde{D}_L(V), \exists n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n(x) \in D_L(V) + (V \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))^{G_L}/(p^r).$$

Or

$$\varphi^n(x) = (\varphi - 1 + 1)^n(x) = x + (\varphi - 1)y$$

et  $\varphi - 1$  est surjectif de  $(V \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))^{G_L}$  dans lui-même, puisque  $\varphi$  y est topologiquement nilpotent. On en déduit le

**Lemme 1.4.**

Pour tout  $x \in \tilde{D}_L(V)$ , il existe  $x' \in D_L(V)$  et  $x'' \in \tilde{D}_L(V)$  tels que

$$x = x' + (\varphi - 1)x''.$$

On peut maintenant montrer l'équation 1.1 en degré 2 :

soit  $(x, y, z) \in (\tilde{D}_L(V))^3$  avec  $\beta(x, y, z) \in (D_L(V))^3$ , alors il existe  $x' \in D_L(V)$  et  $x'' \in \tilde{D}_L(V)$  tels que

$$(\gamma - 1)x + (1 - \varphi)y = (\gamma - 1)x' + (1 - \varphi)(y + (\gamma - 1)x'') \in D_L(V)$$

notons donc  $y' = y + (\gamma - 1)x''$ , par la remarque ci-dessus, et comme  $(\gamma - 1)x' \in D_L(V)$ , on a encore  $y' \in D_L(V)$ . De même, si  $z' = z + (\tau - 1)x''$ , on a

$$(\tau - 1)x + (1 - \varphi)z = (\tau - 1)x' + (1 - \varphi)(z + (\tau - 1)x'') \in D_L(V)$$

montrant que  $z' \in D_L(V)$ . Il est alors immédiat que  $\beta(x, y, z) = \beta(x', y', z')$ .

En degré 3 :

on suppose  $(x, y, z) \in (\tilde{D}_L(V))^3$  avec  $\eta(x, y, z) \in (D_L(V))^3$ . Alors il existe  $x', y' \in D_L(V)$  et  $x'', y'' \in \tilde{D}_L(V)$  associés à  $x$  et  $y$  par la condition du lemme précédent. Alors un raisonnement similaire à celui donné pour le degré 2 montre que  $z' = z + (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)x'' + (\delta - \gamma)y'' \in D_L(V)$  et que  $\eta(x, y, z) = \eta(x', y', z')$ .

Montrons maintenant l'équation 1.2 : soit  $u = (x, y, z) \in \tilde{Z}^1$ , et soit  $x'$  et  $x''$  associés à  $x$  comme précédemment. Alors on montre par la même méthode que  $u - \alpha(x'') \in Z^1$ . Soit  $u = (x, y, z) \in \tilde{Z}^2$ , et  $x', x'', y', y''$  associés à  $x$  et  $y$ . Alors on montre encore que  $u - \beta(x'', y'', 0) \in Z^2$ .

En degré 3 enfin, c'est une conséquence immédiate du lemme : tout  $x \in \tilde{D}_L(V)$  s'écrit  $x = x' + (\varphi - 1)x'' = x' + \eta(0, 0, x'')$ .

Ceci achève la preuve alternative de la première partie du Théorème 1.3..

Remarquons toutefois que la preuve donnée plus haut, d'une part est plus naturelle, et d'autre part permet d'obtenir des formules explicites. On l'a vu précédemment dans cette section, et c'est encore l'objet de la prochaine où l'on donne les formules explicites de cup-produit.

## 1.6 Cup-produit

### 1.6.1 Formule explicite pour le cup-produit

Dans [Her01], Herr donne des formules explicites pour le cup-produit en termes du complexe qu'il associe à la représentation. Le théorème suivant donne les formules que l'on obtient dans le cas métabélien :

#### Théorème 1.4.

Soient  $V$  et  $V'$  deux représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques de  $G_K$ , alors le cup-produit induit les applications :

$$1. \text{ Pour } (a) \in H^0(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))) \text{ et } (a') \in H^0(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V'))),$$

$$(a) \cup (a') = (a \otimes a') \in H^0(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V \otimes V'))),$$

$$2. \text{ pour } (x, y, z) \in H^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V))) \text{ et } (a') \in H^0(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V'))),$$

$$(x, y, z) \cup (a') = (x \otimes a', y \otimes a', z \otimes a') \in H^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V \otimes V'))),$$



3. pour  $(a) \in H^0(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V)))$  et  $(x', y', z') \in H^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V')))$ ,

$$(a) \cup (x', y', z') = (a \otimes x', a \otimes y', a \otimes z') \in H^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V \otimes V')))$$

4. et pour  $(x, y, z) \in H^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V)))$  et  $(x', y', z') \in H^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V')))$ ,  
 $(x, y, z) \cup (x', y', z') \in H^2(C_{\varphi, \gamma, \tau}(D_L(V \otimes V')))$  s'écrit :

$$(y \otimes \gamma x' - x \otimes \varphi y', \quad z \otimes \tau x' - x \otimes \varphi z', \quad \delta z \otimes \tau^{\chi(\gamma)} y' - y \otimes \gamma z' + \Sigma_{z, z'})$$

où

$$\Sigma_{z, z'} = \sum_{n \geq 1} \binom{\chi(\gamma)}{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (\tau-1)^{k-1} z \otimes \tau^k (\tau-1)^{n-k} z'.$$

### 1.6.2 Démonstration

La seule identité non triviale est la dernière. Nous allons utiliser la construction du paragraphe précédent pour la montrer et donc supposer que  $V$  et  $V'$  sont des objets de  $M_{G_K, p^r-tor}$ . Nous utiliserons ainsi les suites exactes

$$0 \rightarrow V \rightarrow \text{Ind}_{G_K}(V) \rightarrow V'' \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow F^0(V) \rightarrow F^0(\text{Ind}_{G_K}(V)) \rightarrow F^0(V'') \rightarrow F^1(V) \rightarrow 0$$

ainsi que la propriété du cup-produit  $da \cup b = d(a \cup b)$ .

Plus précisément, on fixe  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  comme dans l'énoncé. Alors il existe un élément  $a \in D_L(\text{Ind}_{G_K}(V))$  vérifiant  $\alpha(a) = (x, y, z)$  et  $\bar{a} \in (\text{Ind}_{G_K}(V)/V)^{G_K}$ . Alors  $(x, y, z) \cup (x', y', z')$  vaut

$$\begin{aligned} \alpha(a) \cup (x', y', z') &= d(\bar{a} \otimes x', \bar{a} \otimes y', \bar{a} \otimes z') = \beta(a \otimes x', a \otimes y', a \otimes z') \\ &= ((\gamma-1)(a \otimes x') - (\varphi-1)(a \otimes y'), \\ &\quad (\tau-1)(a \otimes x') - (\varphi-1)(a \otimes z'), \\ &\quad (\tau^{\chi(\gamma)}-1)(a \otimes y') - (\gamma-\delta)(a \otimes z')) \end{aligned}$$

On utilise l'identité formelle

$$(\sigma-1)(a \otimes b) = (\sigma-1)a \otimes \sigma b + a \otimes (\sigma-1)b.$$

Le premier terme s'écrit

$$\begin{aligned} (\gamma-1)a \otimes x' &- (\varphi-1)a \otimes y' \\ &= (\gamma-1)a \otimes \gamma x' + a \otimes (\gamma-1)x' - (\varphi-1)a \otimes y' - a \otimes (\varphi-1)y' \\ &= y \otimes \gamma x' + a \otimes ((\gamma-1)x' - (\varphi-1)y') - x \otimes y' \\ &= y \otimes \gamma x' - x \otimes y'. \end{aligned}$$

Le second résultat d'un calcul similaire

$$\begin{aligned}
 (\tau - 1)(a \otimes x') &= (\varphi - 1)(a \otimes z') \\
 &= (\tau - 1)a \otimes \tau x' + a \otimes (\tau - 1)x' - (\varphi - 1)a \otimes z' - a \otimes (\varphi - 1)z' \\
 &= z \otimes \tau x' + a \otimes ((\tau - 1)x' - (\varphi - 1)z') - x \otimes z' \\
 &= z \otimes \gamma x' - x \otimes z'.
 \end{aligned}$$

Explicitons enfin le calcul du troisième terme.

En itérant l'identité

$$(\sigma - 1)(a \otimes b) = (\sigma - 1)a \otimes \sigma b + a \otimes (\sigma - 1)b,$$

on obtient par récurrence :

$$(\sigma - 1)^n(a \otimes b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sigma - 1)^k a \otimes \sigma^k (\sigma - 1)^{n-k} b.$$

On obtient tout d'abord :

$$(\tau^{\chi(\gamma)} - 1)a \otimes y' = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)a \otimes \tau^{\chi(\gamma)} y' + a \otimes (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)y' = \delta z \otimes \tau^{\chi(\gamma)} y' + a \otimes (\gamma - \delta)z'$$

et

$$(\gamma - 1)a \otimes z' = (\gamma - 1)a \otimes \gamma z' + a \otimes (\gamma - 1)z' = y \otimes \gamma z' + a \otimes (\gamma - 1)z'.$$

Reste à calculer  $\delta(a \otimes z')$ . Pour cela on rappelle que

$$\delta = \frac{\tau^{\chi(\gamma)} - 1}{\tau - 1} = \sum_{n \geq 1} \binom{\chi(\gamma)}{n} (\tau - 1)^{n-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \delta(a \otimes z') &= \sum_{n \geq 1} \binom{\chi(\gamma)}{n} (\tau - 1)^{n-1} (a \otimes z') \\
 &= \sum_{n \geq 1} \binom{\chi(\gamma)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\tau - 1)^k a \otimes \tau^k (\tau - 1)^{n-1-k} z' \\
 &= a \otimes \delta z' + \sum_{n \geq 1} \binom{\chi(\gamma)}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\tau - 1)^{k-1} z \otimes \tau^k (\tau - 1)^{n-1-k} z'.
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

## 1.7 Application de Kummer

Dans ce paragraphe, nous supposons que  $p$  est impair et  $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}$ .

Le but est de calculer en termes du complexe de Herr l'application de Kummer

$$\kappa : K^* \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z}_p(1)).$$

Plus précisément, si

$$F(Y) \in \left( W[[Y]]\left[\frac{1}{Y}\right] \right)^\times,$$

nous allons calculer un triplet  $(x, y, z) \in Z^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(\tilde{\mathbf{A}}_L(1)))$  correspondant à l'image  $\kappa \circ \theta(F(Y))$  de

$$\theta(F(Y)) = F(\pi) \in K^*.$$

Remarquons qu'il existe  $d \in \mathbb{Z}$  et  $G(Y) \in (W[[Y]])^\times$  tels que

$$F(Y) = Y^d G(Y).$$

En fait  $G(Y)$  s'écrit comme le produit d'une racine  $p^{n-1}$ -ième de l'unité (qui ne joue aucune rôle) et d'une série de  $1 + (p) \subset W[[Y]]$ .

Notons

$$\alpha = \theta(F(Y)) \in K^*.$$

Choisissons

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \in \tilde{\mathbf{E}}$$

tel que  $\alpha_0 = \alpha$ . Alors

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\rho^d} \in \tilde{\mathbf{E}}^+$$

et donc

$$\frac{[\tilde{\alpha}]}{Y^d} \in \tilde{\mathbf{A}}^+$$

et pour tout  $\sigma \in G_K$ , il existe  $\psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p$  tel que

$$\sigma(\alpha) = \alpha \varepsilon^{\psi_\alpha(\sigma)}.$$

L'application  $\sigma \mapsto \varepsilon^{\psi_\alpha(\sigma)}$  est en fait un cocycle représentant  $\kappa(\alpha)$ . On a donc

$$\sigma([\tilde{\alpha}]) = [\tilde{\alpha}](1 + X)^{\psi_\alpha(\sigma)} \text{ où } \kappa(\alpha) = \varepsilon^{\psi_\alpha} \in H^1(K, \mathbb{Z}_p(1)).$$

Par ailleurs, la série  $\log \frac{[\tilde{\alpha}]}{F(Y)}$  converge dans  $B_{cris}$  et même dans  $\text{Fil}^1 B_{cris}$ , en effet

$$\frac{[\tilde{\alpha}]}{F(Y)} \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \text{ et } \theta\left(\frac{[\tilde{\alpha}]}{F(Y)}\right) = 1.$$

Pour tout  $h \in G_L$ ,

$$(h - 1) \log \frac{[\tilde{\alpha}]}{F(Y)} = \psi_\alpha(h)t \text{ où } t = \log(1 + X).$$

Définissons

$$\tilde{b} = \log \frac{[\tilde{\alpha}]}{F(Y)} / t \in \text{Fil}^0 B_{\text{cris}}.$$

On a alors

$$\psi_\alpha(h) = (h-1)(\tilde{b}) \quad \forall h \in G_L.$$

Par ailleurs, si on note

$$f(Y) = \mathcal{L}(F) = \frac{1}{p} \log \frac{F(Y)^p}{\varphi(F(Y))} \in W[[Y]]$$

alors

$$(\varphi-1)(\tilde{b}) = \frac{1}{t} f(Y).$$

Choisissons  $b_1 \in \tilde{\mathbf{A}}$  solution de

$$(\varphi-1)b_1 = -\frac{f(Y)}{X}.$$

Si  $X_1 = \varphi^{-1}(X) = [\varepsilon^{\frac{1}{p}}] - 1$ , et  $\omega = \frac{X}{X_1} \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  alors

$$(\varphi-\omega)(b_1 X_1) = -f(Y).$$

Or par réduction modulo  $p$  de cette identité, on obtient une équation de la forme

$$T^p - \overline{\omega}T = -\overline{f(Y)}$$

puis par approximations successives modulo  $p^m$ , et du fait que  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  est intégralement clos,  $b_1 X_1 \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ . Mais  $\frac{1}{X_1} \in \text{Fil}^0 B_{\text{cris}}$ , en effet la série

$$\frac{t}{X_1} = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} \frac{\omega X^{n-1}}{n} = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} \frac{\omega^n X_1^{n-1}}{n}$$

converge dans  $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}}$ , et donc

$$\frac{1}{X_1} = \frac{t}{X_1} \frac{1}{t} \in \text{Fil}^0 B_{\text{cris}}.$$

Ainsi

$$b_1 = (b_1 X_1) \cdot \frac{1}{X_1} \in \text{Fil}^0 B_{\text{cris}}.$$

De plus,  $(\varphi-1)b_2 = -\frac{f(Y)}{2}$  admet une solution  $b_2$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ , si bien que si l'on pose

$$x = -\frac{f(Y)}{X} - \frac{f(Y)}{2} \in \tilde{\mathbf{A}}_L$$

et que l'on choisit une solution  $b \in \tilde{\mathbf{A}}$  de  $(\varphi-1)b = x$ , alors  $b \in \text{Fil}^0 B_{\text{cris}}$ .

Ainsi  $\tilde{b} + b \in \text{Fil}^0 B_{\text{cris}}$  et

$$(\varphi-1)(\tilde{b} + b) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)f(Y).$$

Et on a alors le lemme suivant :

**Lemme 1.5.**

Les solutions de l'équation

$$(\varphi - 1)(\mu) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)f(Y) \quad (1.3)$$

dans  $\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{cris}}$  vivent dans  $\mathbb{Q}_p + \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{cris}}$  et sont invariantes sous l'action de  $G_L$ .

*Preuve du Lemme :* Considérons

$$u = t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)f(Y) = \left(1 - \frac{t}{X} - \frac{t}{2}\right)f(Y) = -\sum_{n \geq 2} \frac{(-X)^n}{n+1} f(Y) + \sum_{n \geq 2} \frac{(-X)^n}{2n} f(Y)$$

alors l'équation 1.3 se ramène, en posant  $\mu' = t\mu$ , à

$$\left(\frac{\varphi}{p} - 1\right)(\mu') = u \quad (1.4)$$

or les suites  $\frac{(-X)^n}{n+1} f(Y)$  et  $\frac{(-X)^n}{2n} f(Y)$  convergent vers 0 dans  $B_{\mathrm{cris}}$  et

$$\left(\frac{\varphi}{p}\right)^k \left(\frac{X^n}{n+1}\right) = \frac{((1+X)^{p^k} - 1)^n}{(n+1)p^k}$$

mais

$$((1+X)^{p^k} - 1) = \sum_{1 \leq r \leq p^k} \frac{p^k!}{(p^k - r)!} \frac{X^r}{r!} \in p^k A_{\mathrm{cris}}$$

ainsi

$$\left(\frac{\varphi}{p}\right)^k \left(\frac{X^n}{n+1}\right) \in \frac{p^{k(n-1)}}{n+1} A_{\mathrm{cris}}$$

converge vers 0 uniformément en  $n$  dans  $B_{\mathrm{cris}}$ . Il en va de même de  $\left(\frac{\varphi}{p}\right)^k \left(\frac{X^n}{n+1}\right)$ .

Ainsi on obtient une solution  $-\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\varphi}{p}\right)^n u$  de 1.4 dans  $(\mathrm{Fil}^2 B_{\mathrm{cris}})^{G_L}$  et donc une solution de 1.3 dans  $(\mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{cris}})^{G_L}$ . Et le fait que

$$(\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{cris}})_{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$$

conclut le lemme. ◇

Ainsi  $b + \tilde{b} \in (\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{cris}})^{G_L}$ , donc, pour tout  $h \in G_L$ ,

$$(h-1)(-b) = (h-1)\tilde{b} = \psi_\alpha(h).$$

On en conclut qu'il existe  $z \in \tilde{\mathbf{A}}_L(1)$  unique et  $y \in \tilde{\mathbf{A}}_L(1)$  unique modulo  $(\gamma-1)\mathbb{Z}_p(1)$  tels que  $\kappa(\alpha)$  est l'image dans  $H^1(K, \mathbb{Z}_p(1))$  du triplet

$$(x, y, z) \in Z^1(C_{\varphi, \gamma, \tau}(\tilde{\mathbf{A}}_L(1)))$$

où  $x = -(\frac{1}{X} + \frac{1}{2})f(Y) \otimes \varepsilon$ . En effet, on sait qu'il en existe un  $(x', y', z')$ , mais

$$x' - x \in (\varphi - 1)\tilde{\mathbf{A}}_L(1)$$

ce qui montre l'existence, et  $x$  étant fixé, l'unicité modulo  $\alpha(\mathbb{Z}_p)$  (où  $\alpha$  est la première application du complexe de Herr  $C_{\varphi, \gamma, \tau}(M)$ , cf. la section 1.5).

On obtient le résultat plus précis :

**Proposition 1.3.**

Soit  $F(Y) \in (W[[Y]][\frac{1}{Y}])^\times$ . Alors, l'image de  $F(\pi)$  par l'application de Kummer correspond à la classe d'un triplet

$$\left( -f(Y) \left( \frac{1}{X} + \frac{1}{2} \right), y, z \right) \otimes \varepsilon$$

avec  $y, z \in W[[X, Y]]$ . Ce triplet est congru modulo  $XYW[[X, Y]]$  à

$$\left( -\frac{f(Y)}{X} - \frac{f(Y)}{2}, 0, Y d_{\log} F(Y) \right) \otimes \varepsilon$$

où  $d_{\log}$  représente la dérivée logarithmique.

*Preuve :* Il s'agit de montrer les congruences.

Remarquons que

$$\begin{aligned} \gamma \left( \frac{1 \otimes \varepsilon}{X} \right) &= \frac{\chi(\gamma) \otimes \varepsilon}{\chi(\gamma)X + \frac{\chi(\gamma)(\chi(\gamma)-1)}{2}X^2 + X^3u(X)} \\ &= \left( \frac{1}{X} - \frac{(\chi(\gamma)-1)}{2} + Xv(X) \right) \otimes \varepsilon \end{aligned}$$

si bien que

$$(\gamma - 1)x \in XYW[[X, Y]](1)$$

où  $\varphi^n$  est topologiquement nilpotent donc  $\varphi - 1$  inversible. Ainsi, on a

$$y \in \mathbb{Z}_p(1) + XYW[[X, Y]](1).$$

En outre, si  $\tilde{\gamma}$  est un relèvement dans  $G_K$  de  $\gamma$ , on a encore

$$(\tilde{\gamma} - 1)(\tilde{b} \otimes \varepsilon) = \psi_\alpha(\tilde{\gamma})$$

d'où, par le *ii)* du Théorème 1.3. d'une part, et le Lemme 1.5. ci-dessus d'autre part,

$$(\tilde{\gamma} - 1)(\tilde{b} \otimes \varepsilon + b \otimes \varepsilon) = \psi_\alpha(\tilde{\gamma}) + (\tilde{\gamma} - 1)(b \otimes \varepsilon) = y \in \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}(1)$$

qui montre que

$$y \in XYW[[X, Y]](1).$$

On procède de même pour  $z$  :

$$(\tau - 1)f(Y) = (f(Y(1+X)) - f(Y)) = \sum_{n \geq 1} \frac{(XY)^n}{n!} f^{(n)}(Y) \equiv XY f'(Y) \pmod{(XY)^2}$$

on remarque de plus que

$$\left(Y \frac{d}{dY}\right) \circ \frac{\varphi}{p} = \varphi \circ \left(Y \frac{d}{dY}\right)$$

si bien que

$$(\tau - 1)f(Y) \equiv X(1 - \varphi)(Y d_{\log} F(Y)) \pmod{(XY)^2}$$

et donc

$$(\tau - 1)x \equiv (\varphi - 1)(Y d_{\log} F(Y) \otimes \varepsilon) \pmod{XYW[[X, Y]](1)}$$

qui montre que

$$z \in Y d_{\log} F(Y) \otimes \varepsilon + \mathbb{Z}_p(1) + XYW[[X, Y]](1). \quad (1.5)$$

Or, par ailleurs, si  $\tilde{\tau}$  est un relèvement dans  $G_K$  de  $\tau$ ,

$$(\tilde{\tau} - 1)(\tilde{b} + b) = \psi_{\alpha}(\tilde{\tau}) - \log \frac{F(Y(1 + X))}{F(Y)} / t + (\tilde{\tau} - 1)b \in \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}$$

si bien que

$$z = \psi_{\alpha}(\tilde{\tau}) + (\tilde{\tau} - 1)b \in \log \frac{F(Y(1 + X))}{F(Y)} / t + \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}$$

qui combiné avec 1.5 fournit le résultat voulu.  $\square$

## Chapitre 2

# Groupes Formels

Dans ce chapitre, on montre la formule explicite d'Abrashkin pour les groupes formels (cf. [Abr97]), sans hypothèse sur la présence de racines  $p^M$ -ièmes de l'unité dans le corps de base. Pour cela, on calcule explicitement l'application de Kummer liée au symbole de Hilbert d'un groupe formel en termes de son  $(\varphi, \Gamma)$ -module, puis l'on calcule le cup-produit avec l'application de Kummer usuelle et l'image de ce cup-produit par l'isomorphisme de réciprocité, qui nous donne la formule recherchée.

### 2.1 Notations et rappels sur les groupes formels

On considère  $G$  un groupe formel connexe et lisse sur  $W = W(k)$ , l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps fini  $k$ . On note encore  $K_0$  le corps des fractions de  $W$  et  $K$  une extension totalement ramifiée de  $K_0$ . Sous ces hypothèses, on peut associer (cf. [Fon77]) à  $G$  une loi de groupe formel qui détermine  $G$ . Rappelons de quoi il s'agit.

#### 2.1.1 Loi de Groupe Formel

On fixe  $p$  un nombre premier impair et  $d > 0$  deux entiers. On écrit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)$  et  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ .

##### Définition 2.1.

Une loi de groupe formel (commutatif)  $\mathbf{F}$  de dimension  $d$  sur un anneau commutatif  $R$  est la donnée d'un  $d$ -uplet de séries formelles

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (F_i(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d))_{1 \leq i \leq d} \in (R[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]])^d$$

vérifiant

1.  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{0}) = \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{X}) = \mathbf{X}$ ,
2.  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z})$ ,
3.  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ .



Pour une loi de groupe formel  $\mathbf{F}$  donnée, il existe un  $d$ -uplet  $\mathbf{f} \in (R[[\mathbf{X}]])^d$  tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{f}(\mathbf{X})) = \mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

si bien que sur un domaine sur lequel  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{f}$  convergent (par exemple  $\mathfrak{m}_R^d$ , si  $R$  est un anneau local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_R$ , complet pour la topologie  $\mathfrak{m}_R$ -adique),  $\mathbf{F}$  définit une structure de groupe commutatif, d'élément neutre  $\mathbf{0}$ , l'inverse de  $\mathbf{x}$  étant  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . On note alors la loi de groupe

$$\mathbf{x} +_F \mathbf{y} := \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Si  $\mathbf{G}$  est une autre loi de groupe formel sur  $R$  de dimension  $d'$ , alors un morphisme de  $\mathbf{F}$  dans  $\mathbf{G}$  est un  $d'$ -uplet de séries formelles  $\mathbf{h}(\mathbf{X}) \in (R[[\mathbf{X}]])^{d'}$  sans terme constant tel que

$$\mathbf{h}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \mathbf{G}(\mathbf{h}(\mathbf{X}), \mathbf{h}(\mathbf{Y})).$$

Le morphisme  $\mathbf{h}$  est un isomorphisme si  $d = d'$  et s'il existe  $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \in (R[[\mathbf{X}]])^d$  sans terme constant avec

$$\mathbf{h} \circ \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{g} \circ \mathbf{h}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$$

ou de manière équivalente si  $d\mathbf{h}(\mathbf{0}) \in GL_d(R)$ . On dit que  $\mathbf{h}$  est un isomorphisme strict si on a la normalisation  $d\mathbf{h}(\mathbf{0}) = I_d$ , *i.e.*, si pour tout  $1 \leq i \leq d$ , on a  $h_i(\mathbf{X}) \equiv X_i \pmod{\deg 2}$ .

Si  $R$  est une algèbre sur  $\mathbb{Q}$ , alors pour tout groupe formel  $\mathbf{F}$  il existe un unique isomorphisme strict, noté  $\log_F$  de  $\mathbf{F}$  sur la loi de groupe formel additive  $\mathbf{F}_a : (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ . On l'appelle le *logarithme vectoriel* de  $\mathbf{F}$ .

Les applications coordonnées de  $\log_F$  forment une base des *logarithmes* de  $\mathbf{F}$ , les morphismes de  $\mathbf{F}$  sur le groupe additif de  $R$ .

### 2.1.2 Périodes $p$ -adiques

Reprenons les notations de la première partie avec donc  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  de corps résiduel  $k$  et  $K_0 = W(k)[\frac{1}{p}]$ . Fixons encore  $M \in \mathbb{N}$ .

#### Définition 2.2.

Si l'isogénie  $\text{pid}_G : G \rightarrow G$  est finie et plate au-dessus de  $W$  de degré  $p^h$ , on dit que  $G$  est de hauteur finie et on appelle  $h$  la hauteur de  $G$ .

On note  $G$  un groupe formel sur  $W$  de dimension  $d$  et de hauteur  $h$ . On définit

$$G[p^n] = \ker(p^n \text{id}_G : G \rightarrow G)$$

le sous-groupe formel des points de  $p^n$ -torsion de  $G$  et on note

$$T(G) = \varprojlim G[p^n](\overline{K})$$

le module de Tate de  $G$ . On suppose de plus que

$$G[p^M](\overline{K}) = G[p^M](K),$$

autrement dit, on suppose que les points de  $p^M$ -torsion de  $G$  vivent dans  $K$ .

Alors  $T(G)$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang  $h$  et  $G[p^M](\overline{K}) = G[p^M](K)$  est isomorphe en tant que représentation de  $G_K$  à  $(\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^h$ .

L'espace des pseudo-logarithmes de  $G$  (sur  $K_0$ ) est le quotient

$$\{F \in K_0[[\mathbf{X}]] \mid F(\mathbf{X} +_G \mathbf{Y}) - F(\mathbf{X}) - F(\mathbf{Y}) \in \mathcal{O}_{K_0}[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \otimes \mathbb{Q}_p\} / \mathcal{O}_{K_0}[[\mathbf{X}]] \otimes \mathbb{Q}_p.$$

On le note  $H^1(G)$ . C'est un  $K_0$ -espace vectoriel de dimension  $h$ . L'espace des logarithmes de  $G$  est

$$\Omega(G) = \{F \in K_0[[\mathbf{X}]] \mid F(\mathbf{X} +_G \mathbf{Y}) = F(\mathbf{X}) + F(\mathbf{Y})\}.$$

C'est naturellement un sous- $K_0$ -espace vectoriel de  $H^1(G)$  de dimension  $d$ . De plus,  $H^1(G)$  admet la filtration

$$\mathrm{Fil}^0(H^1(G)) = H^1(G), \quad \mathrm{Fil}^1(H^1(G)) = \Omega(G), \quad \mathrm{Fil}^2(H^1(G)) = 0.$$

Muni de sa filtration, et du Frobenius :

$$\varphi : F(\mathbf{X}) \mapsto F^\varphi(\mathbf{X}^p),$$

$H^1(G)$  est appelé le *module de Dieudonné* de  $G$ .

Dans [Fon77], Fontaine montre qu'il existe un accouplement

$$H^1(G) \times T(G) \rightarrow B_{cris}^+$$

décrit de manière explicite par Colmez dans [Col92].

On peut le définir ainsi : soit  $\overline{F} \in H^1(G)$ , et  $o = (o_s)_{s \geq 0} \in T(G)$  ; on choisit pour tout  $s$  un relèvement  $\hat{o}_s \in W(\mathfrak{m}_{\mathbf{E}})^d$  de  $o_s$ , *i.e.* vérifiant  $\theta(\hat{o}_s) = o_s$  ; alors la suite  $p^s F(\hat{o}_s)$  converge vers un élément  $\int_o d\overline{F}$  de  $B_{cris}^+$  indépendant du choix des relèvements  $\hat{o}_s$  et  $F$ . De plus cet accouplement commute à l'action de Galois et de  $\varphi$  et respecte les filtrations : si  $F$  est un logarithme, alors  $\int_o dF \in \mathrm{Fil}^1 B_{cris}^+$ .

Cet accouplement nous permet d'identifier  $H^1(G)$  et  $\mathrm{Hom}_{G_{K_0}}(T(G), B_{cris}^+)$  avec la filtration induite par celle de  $B_{cris}^+$ . Pour travailler à un niveau entier, on introduit un réseau de  $H^1(G)$ , le  $W$ -module

$$D_{cris}^*(G) = \mathrm{Hom}_{G_{K_0}}(T(G), A_{cris})$$

muni de la filtration et du Frobenius  $\varphi$  induits par ceux de  $A_{cris}$ . Le foncteur  $D_{cris}^*$  est la version contravariante du foncteur cristallin de la théorie de Fontaine. La filtration est encore de longueur 1 et on note

$$D^0(G) = D_{cris}^*(G) = \mathrm{Hom}_{G_{K_0}}(T(G), A_{cris})$$

et

$$D^1(G) = \text{Fil}^1 D_{\text{cris}}^*(G) = \text{Hom}_{G_{K_0}}(T(G), \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}).$$

Alors  $D^1(G)$  est un facteur direct de  $D^0(G)$  de rang  $d$ . On fixe donc une base  $\{l_1, \dots, l_d\}$  de  $D^1(G)$  que l'on complète en une base

$$\{l_1, \dots, l_d, m_1, \dots, m_{h-d}\}$$

de  $D^0(G)$ .

Et, pour tout  $1 \leq i \leq d$ , on a

$$\varphi(l_i) = \varphi \circ l_i \in \varphi(\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^d \subset (pA_{\text{cris}})^d$$

et ainsi,  $\frac{\varphi}{p}(l_i) \in D^0(G)$ . De plus, [Fon77] et [FL82] montrent d'une part que  $\varphi$  est topologiquement nilpotent sur  $D^0(G)$  (car  $G$  est connexe) et d'autre part que le module filtré  $D^0(G)$  vérifie

$$D^0(G) = \varphi(D^0) + \frac{\varphi}{p}D^1(G).$$

Et ainsi, si l'on définit  $\tilde{\varphi}$  l'endomorphisme de  $D^0$  donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(l_i) &= \frac{\varphi}{p}(l_i) \quad \forall 1 \leq i \leq d, & \text{et} \\ \tilde{\varphi}(m_i) &= \varphi(m_i) \quad \forall 1 \leq i \leq h-d, \end{aligned}$$

alors sa matrice  $\mathcal{E} \in GL_h(W)$ .

Si l'on note  $\mathbf{l} = {}^t(l_1, \dots, l_n)$  et  $\mathbf{m} = {}^t(m_1, \dots, m_{h-n})$ , alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{p}(\mathbf{l}) \\ \varphi(\mathbf{m}) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut écrire une décomposition en blocs

$$\mathcal{E}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\mathbf{l} = A \frac{\varphi}{p}(\mathbf{l}) + B \varphi(\mathbf{m}) \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = C \frac{\varphi}{p}(\mathbf{l}) + D \varphi(\mathbf{m}).$$

Mais  $\varphi$  étant topologiquement nilpotent sur  $D^0(G)$ , on peut écrire

$$\mathbf{l} = \sum_{u \geq 1} F_u \frac{\varphi^u(\mathbf{l})}{p}, \quad \mathbf{m} = \sum_{u \geq 1} F'_u \frac{\varphi^u(\mathbf{l})}{p}$$

où

$$F_1 = A, \quad F_2 = B \varphi(C), \quad F_u = B \left( \prod_{1 \leq k \leq u-2} \varphi^k(D) \right) \varphi^{u-1}(C) \quad \text{pour } u > 2,$$

et

$$F'_1 = C, \quad F'_2 = D\varphi(C), \quad F'_u = \left( \prod_{0 \leq k \leq u-2} \varphi^k(D) \right) \varphi^{u-1}(C).$$

Définissons sur  $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p} = W[[\mathbf{X}]] \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}$  l'opérateur  $\varphi$ -semi-linéaire  $\Delta$  par

$$\Delta(w\mathbf{X}^{\mathbf{u}}) = \varphi(w)\mathbf{X}^{p\mathbf{u}}$$

l'agit sur  $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^d$  et on peut donc encore définir un opérateur  $\mathbb{Z}_p$ -linéaire

$$\mathcal{A} = \sum_{u \geq 1} F_u \Delta^u$$

sur  $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^d$ . La série formelle vectorielle

$$l_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \sum_{m \geq 1} \frac{\mathcal{A}^m(\mathbf{X})}{p^m}$$

donne alors le logarithme vectoriel d'un groupe formel  $F$ . Ce groupe admet le même système de Honda formel que  $G$ , et comme les systèmes de Honda paramètrent les groupes formels à isomorphisme près, on déduit que  $F$  est isomorphe à  $G$  (cf. [Fon77], Chapitre 5). Du fait que l'on connaît mieux la forme des logarithmes et des pseudo-logarithmes de  $F$  que de ceux de  $G$ , en particulier leur expression en fonction de  $\mathcal{A}$  qui donne de surcroît un contrôle des dénominateurs, nous allons dorénavant remplacer l'étude de  $G$  par celle de  $F$ .

## 2.2 Rappels sur le groupe formel $F$

Pour cette section, le lecteur se référera à [Abr97] dont on a essayé de prélever et rappeler l'essentiel.

En premier lieu, décrivons le module de Dieudonné de  $F$ .

On connaît déjà une base des logarithmes, les séries formelles coordonnées de la série vectorielle

$$l_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \sum_{m \geq 1} \frac{\mathcal{A}^m(\mathbf{X})}{p^m}.$$

On la complète en une base des pseudo-logarithmes en posant

$$m_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) = \sum_{u \geq 1} F'_u \frac{\varphi^u(l_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}))}{p}.$$

Soit  $o = (o_s)_{s \geq 0} \in T(F)$ . Pour tout  $s \geq 0$ , on choisit un relèvement  $\hat{o}_s \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})^d$  de  $o_s$ , avec donc  $\theta(\hat{o}_s) = o_s$ . Alors le lemme suivant dit que la suite  $p^s \text{id}_F \hat{o}_s$  converge dans  $W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})^d$  vers un élément  $j(o)$  indépendant du choix des relèvements :

**Lemme 2.1.**

1. La série  $l_{\mathcal{A}}$  définit un homomorphisme injectif continu de  $G_K$ -modules

$$l_{\mathcal{A}} : F(W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})) \rightarrow A_{cris}^d \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

De plus, la restriction de  $l_{\mathcal{A}}$  à  $F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))$  est à valeurs dans  $(\mathrm{Fil}^1 A_{cris})^d$ .

2. L'endomorphisme  $\mathrm{pid}_F$  de  $F(W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))$  est topologiquement nilpotent.
3. L'application  $j : T(F) \rightarrow W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})^d$  est bien définie et fournit un homomorphisme injectif continu de  $G_K$ -modules  $j : T(F) \rightarrow F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))$ .

*Preuve :* Le 1. est le Lemme 1.5.1 de [Abr97].

Le 2. provient du fait que la série correspondant à  $\mathrm{pid}_F$  s'écrit

$$\mathrm{pid}_F \mathbf{X} = p\mathbf{X} + \text{degrés supérieurs.}$$

Rappelons rapidement la preuve de 3. :

Pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\theta(p^s \mathrm{id}_F \hat{o}_s) = o_0 = 0$$

d'où  $p^s \mathrm{id}_F \hat{o}_s \in F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))$ . Par ailleurs, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\mathrm{pid}_F \hat{o}_{s+1} \equiv \hat{o}_s \pmod{F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))}$$

d'où

$$p^{s+1} \mathrm{id}_F \hat{o}_{s+1} \equiv p^s \mathrm{id}_F \hat{o}_s \pmod{p^s \mathrm{id}_F (F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})))}$$

Et 2. donne la convergence de la suite  $(p^s \mathrm{id}_F \hat{o}_s)_s$ .

Le fait que la convergence soit assurée sans condition de compatibilité sur les relèvements donne l'indépendance de la limite par rapport au choix de ces relèvements. En effet, si  $(\hat{o}_s)_{s \geq 0}$  et  $(\hat{o}'_s)_{s \geq 0}$  sont deux relèvements de  $(o_s)_{s \geq 0}$ , alors pour tout relèvement  $(\hat{o}''_s)_{s \geq 0}$  où

$$\forall s \geq 0, \hat{o}''_s = \hat{o}_s \text{ ou } \hat{o}'_s,$$

on a encore la convergence de  $(p^s \mathrm{id}_F \hat{o}''_s)_s$ , d'où l'identité des limites.

Le reste est immédiat.  $\square$

La composition du logarithme vectoriel  $l_{\mathcal{A}}$  et de l'application  $j$  ainsi définie donne une injection  $G_K$ -équivariante que l'on notera encore  $\mathbf{l}$  de  $T(F)$  dans  $(\mathrm{Fil}^1 A_{cris})^d$ . Cette application vérifie donc pour tout  $o$  dans  $T(F)$  :

$$\mathbf{l}(o) = l_{\mathcal{A}}(\lim_{s \rightarrow \infty} p^s \mathrm{id}_F \hat{o}_s) = \lim_{s \rightarrow \infty} p^s l_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s).$$

Si l'on définit maintenant

$$\mathbf{m} = \sum_{u \geq 1} F'_u \frac{\varphi^u(\mathbf{l})}{p},$$

alors  $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$  fournit une base de  $D^0(F)$  avec  $\mathbf{1}$  base de  $D^1(F)$ . L'application ainsi définie

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} : T(F) \rightarrow A_{cris}^h$$

se factorise par

$$\begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}} \\ m_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} : F(W^1(\mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})) \rightarrow A_{cris}^h.$$

Cette application est l'accouplement des périodes. On rappelle (cf. [Abr97], Remark 1.7.5) que cette application prend ses valeurs dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+[[X^{p-1}/p]]$ . Il s'agit aussi d'une conséquence des calculs de Wach pour les représentations potentiellement cristallines (cf. [Wac96]).

Nous fixons désormais une base  $(o^1, \dots, o^h)$  de  $T(F)$  ce qui nous permet d'introduire la matrice des périodes

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}(o^1) & \dots & \mathbf{1}(o^h) \\ \mathbf{m}(o^1) & \dots & \mathbf{m}(o^h) \end{pmatrix} \in M_h(\tilde{\mathbf{A}}^+[[X^{p-1}/p]]) \cap GL_h(\text{Frac} \tilde{\mathbf{A}}^+[[X^{p-1}/p]]).$$

Elle vérifie l'égalité

$$\begin{pmatrix} I_d \frac{\varphi}{p} & 0 \\ 0 & I_{h-d} \varphi \end{pmatrix} \mathcal{V} = \mathcal{E} \mathcal{V}.$$

L'inverse de cette matrice est donc la matrice de passage de la base  $(o^1, \dots, o^h)$  dans une base de

$$D_{cris}(T(F)) = (T(F) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris})^{G_{K_0}},$$

la version covariante du module cristallin de la théorie de Fontaine associé à  $T(F)$ .

Soit  $u \in T(F) \otimes A_{cris}$ , si l'on désigne par  $U$  le vecteur des coordonnées de  $y$  dans la base  $(o^1, \dots, o^h) \mathcal{V}^{-1}$  de  $D_{cris}(T(F))$ , alors on peut calculer les coordonnées de

$$\varphi(y) = (o^1, \dots, o^h) \varphi(\mathcal{V}^{-1}) \varphi(U).$$

On sait que

$$\varphi(\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} pI_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_d \frac{\varphi}{p} & 0 \\ 0 & I_{h-d} \varphi \end{pmatrix} \mathcal{V} = \begin{pmatrix} pI_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix} \mathcal{E} \mathcal{V}$$

si bien que

$$\varphi(\mathcal{V}^{-1}) = \mathcal{V}^{-1} \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} p^{-1} I_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix}$$

et les coordonnées de  $\varphi(y)$  dans la base  $(o^1, \dots, o^h)\mathcal{V}^{-1}$  sont donc

$$\mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} I_d \frac{\varphi}{p} & 0 \\ 0 & I_{h-d}\varphi \end{pmatrix} U.$$

Compte tenu de cela, le lemme suivant montre que  $\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}^*}{p} & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix}$  agit comme le Frobenius sur  $D_{\text{cris}}(T(F))$ .

**Lemme 2.2.**

Soit  $\mathcal{A}^* = \sum_{u \geq 1} F_u \varphi^u$ , alors :

$$\mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{p}(l_{\mathcal{A}}) \\ \varphi(m_{\mathcal{A}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}^*}{p}(l_{\mathcal{A}}) \\ m_{\mathcal{A}} \end{pmatrix}$$

*Preuve :* On calcule :

$$A \frac{\varphi}{p}(l_{\mathcal{A}}) + B \varphi(m_{\mathcal{A}}) = A \frac{\varphi}{p}(l_{\mathcal{A}}) + \sum_{u \geq 1} B \varphi F'_u \frac{\varphi^u(l_{\mathcal{A}})}{p} = \frac{\mathcal{A}^*}{p}(l_{\mathcal{A}})$$

car  $B \varphi F'_u = F_{u+1}$  pour tout  $u \geq 1$ . Et puis :

$$C \frac{\varphi}{p}(l_{\mathcal{A}}) + D \varphi(m_{\mathcal{A}}) = C \frac{\varphi}{p}(l_{\mathcal{A}}) + \sum_{u \geq 1} D \varphi F'_u \frac{\varphi^u(l_{\mathcal{A}})}{p} = m_{\mathcal{A}}$$

car  $D \varphi F'_u = F'_{u+1}$  pour tout  $u \geq 1$ . □

Abrashkin calcule de plus le conoyau de l'injection  $j$  (cf. [Abr97], Proposition 2.1.) :

**Proposition 2.1.**

$(\mathcal{A}^* - p)l_{\mathcal{A}}(F(W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})) = (\mathcal{A}^* - p)l_{\mathcal{A}}(F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))$  et on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T(F) \xrightarrow{j} F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})) \xrightarrow{\left(\frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1\right)l_{\mathcal{A}}} W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})^d \longrightarrow 0$$

Il montre encore (cf. [Abr97], Lemme 1.6.2.)

**Lemme 2.3.**

$F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  est uniquement  $p$ -divisible.

Cela permet d'obtenir une injection continue  $G_K$ -équivariante

$$\delta : F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) \rightarrow F(W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))^{(\mathcal{A}^* - p)l_{\mathcal{A}}=0}$$

définie ainsi : si  $x \in F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ , alors par le lemme précédent, il existe pour tout  $s \geq 0$  un unique  $x_s \in F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  tel que

$$p^s \text{id}_F x_s = x.$$

Alors la suite  $(p^s \text{id}_F[x_s])_s$  converge vers un élément  $\delta(x)$  de  $F(W(\mathfrak{m}_{\mathbf{E}}))$ .

De plus,  $\mathcal{A}$  coïncide sur les représentants de Teichmuller avec  $\mathcal{A}^*$ , car  $\Delta$  coïncide alors avec  $\varphi$ , ce qui montre le dernier point :

$$(\mathcal{A}^* - p)l_{\mathcal{A}}(\delta(x)) = 0.$$

Pour finir, remarquons que

$$\theta(\delta(x)) = \theta([x]).$$

En effet, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\theta(p^s \text{id}_F[x_s]) = p^s \text{id}_F \theta([x_s]) = \theta([x]).$$

## 2.3 L'anneau $\mathcal{G}_{[b,a]}$ et certains sous-anneaux.

### 2.3.1 Présentation des objets

On fixe  $e$  l'indice de ramification absolu de  $K$ .

Dans [Ber02], Berger introduit pour  $s \geq r \geq 0$  l'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r,s]}$ , complété  $p$ -adique de l'anneau

$$\tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \frac{p}{Y^{\text{rep}/(p-1)}}, \frac{Y^{\text{sep}/(p-1)}}{p} \right].$$

On introduit alors, pour  $a > b \geq 0$ , l'anneau

$$\mathcal{G}_{[b,a]} := \tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \left[ \frac{Y^{ae}}{p}, \frac{p}{Y^{be}} \right] \right]$$

qui pour  $a$  et  $b$  entiers admet la description

$$\mathcal{G}_{[b,a]} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^n \mid a_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \frac{1}{p} \right], \begin{array}{ll} aev_p(a_n) + n \geq 0 & \text{pour } n \leq 0 \\ bev_p(a_n) + n \geq 0 & \text{pour } n \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Notons que l'écriture  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^n$  d'un élément de  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  n'est pas unique. L'anneau  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  est naturellement, pour  $a > \alpha \geq \beta > b$  un sous-anneau de  $\tilde{\mathbf{A}}_{[\beta(p-1)/p, \alpha(p-1)/p]}$ . On a même les inclusions

$$\tilde{\mathbf{A}}_{[b(p-1)/p, a(p-1)/p]} \subset \mathcal{G}_{[b,a]} \subset \tilde{\mathbf{A}}_{[\beta(p-1)/p, \alpha(p-1)/p]}.$$

On munit ainsi  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  de la topologie induite, qui est bien définie car les inclusions

$$\tilde{\mathbf{A}}_{[r_1, s_1]} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r_2, s_2]}$$

pour  $r_1 \leq r_2 \leq s_2 \leq s_1$  sont continues.

Cette topologie admet alors la base de voisinages de zéro

$$\left\{ \left\{ \sum_{n > N} a_n \left( \frac{Y^{ae}}{p} \right)^n + \sum_{n > N} b_n \left( \frac{p}{Y^{be}} \right)^n ; a_n, b_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \right\} + p^k \mathcal{G}_{[b,a]} \right\}_{N, k \in \mathbb{N}}.$$



De même, pour  $a_1 > a_2 > b_2 > b_1 \geq 0$  on a des injections continues

$$\mathcal{G}_{[b_1, a_1]} \hookrightarrow \mathcal{G}_{[b_2, a_2]}.$$

Et on note pour  $a \geq b \geq 0$ ,  $\mathcal{G}_{[b, a]}$  le complété  $p$ -adique de  $\bigcup_{\alpha > a} \mathcal{G}_{[b, \alpha]}$ . Il admet encore pour  $a$  et  $b$  entiers la description :

$$\mathcal{G}_{[b, a]} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^n; a_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \frac{1}{p} \right], \begin{array}{ll} aev_p(a_n) + n > 0 & \text{pour } n \geq 0 \text{ et} \\ aev_p(a_n) + n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, & \\ bev_p(a_n) + n \geq 0 & \text{pour } n \leq 0 \end{array} \right\}.$$

Comme on a encore l'inclusion

$$\bigcup_{\alpha > a} \mathcal{G}_{[b, \alpha]} \hookrightarrow \bigcup_{\alpha > a, \beta > b} \tilde{\mathbf{A}}_{[\beta(p-1)/p, \alpha(p-1)/p]}$$

on munit  $\mathcal{G}_{[b, a]}$  de la topologie induite par la topologie  $p$ -adique du complété  $p$ -adique de  $\bigcup_{\alpha > a, \beta > b} \tilde{\mathbf{A}}_{[\beta(p-1)/p, \alpha(p-1)/p]}$  qui fournit la base de voisinages de zéro

$$\left\{ \left\{ \sum_{n > N} a_n \left( \frac{Y^{ae}}{p} \right)^n; a_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \right\} + p^k \mathcal{G}_{[b, a]} \right\}_{N, k \in \mathbb{N}}.$$

On introduit encore pour  $b \geq 0$ ,

$$\mathcal{G}_{[b, \infty]} := \bigcap_{a > b} \mathcal{G}_{[b, a]} = \tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \left[ \frac{p}{Y^{eb}} \right] \right] \subset \tilde{\mathbf{A}}$$

qui est pour  $b$  entier

$$\mathcal{G}_{[b, \infty]} = \left\{ \sum_{n \leq 0} a_n Y^n; a_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+, bev_p(a_n) + n \geq 0 \right\}.$$

Remarquons que le Frobenius

$$\varphi_{\mathcal{G}} \left( \sum_{n < 0} a_n Y^{aen} + \sum_{n \geq 0} a_n Y^{ben} \right) = \sum_{n < 0} \varphi(a_n) Y^{paen} + \sum_{n \geq 0} \varphi(a_n) Y^{pben}$$

définit un morphisme injectif de  $\mathcal{G}_{[b, a]}$  (respectivement  $\mathcal{G}_{[b, a]}$ ) dans  $\mathcal{G}_{[pb, pa]}$  (respectivement  $\mathcal{G}_{[pb, pa]}$ ).

On introduit pour  $a$  et  $b$  entiers le sous-anneau de  $\mathcal{G}_{[b, a]}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{Y, [b, a]} &:= W \left[ \left[ \frac{Y^{ae}}{p}, \frac{p}{Y^{be}} \right] \right] \\ &= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^n; a_n \in K_0, \begin{array}{ll} aev_p(a_n) + n \geq 0 & \text{pour } n \geq 0 \\ bev_p(a_n) + n \geq 0 & \text{pour } n \leq 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

et de même  $\mathcal{G}_{Y,[b,a[}$  le complété  $p$ -adique de  $\bigcup_{\alpha>a} \mathcal{G}_{Y,[b,\alpha]}$ . Il admet la description

$$\mathcal{G}_{Y,[b,a[} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^n ; a_n \in K_0, \begin{array}{ll} aev_p(a_n) + n \geq 0 & \text{pour } n \geq 0 \text{ et} \\ aev_p(a_n) + n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, & \\ bev_p(a_n) + n \geq 0 & \text{pour } n \leq 0 \end{array} \right\}.$$

Enfin, pour  $b \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{Y,[b,\infty[} &:= \bigcap_{a>b} \mathcal{G}_{Y,[b,a]} = W \left[ \left[ \frac{p}{Y^{eb}} \right] \right] \\ &= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y^n ; a_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \frac{1}{p} \right], bev_p(a_n) + n \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ces anneaux ont été étudiés en particulier par Cherbonnier et Colmez dans [CC98]. Contrairement à la situation ci-dessus, l'écriture  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^n$  d'un élément de  $\mathcal{G}_{Y,[b,a]}$  ou  $\mathcal{G}_{Y,[b,a[}$  est unique.

Comme il a été dit plus haut, les périodes des groupes formels sont à valeurs dans l'anneau

$$\tilde{\mathbf{A}}^+[[X^{p-1}/p]] = \tilde{\mathbf{A}}^+[[Y^{pe}/p]] = \mathcal{G}_{[0,p]}.$$

**Remarque** On a

$$\mathcal{G}_{[0,a]} = \tilde{\mathbf{A}}^+[[Y^{ea}/p]]$$

si bien que

$$\mathcal{G}_{[b,a]} = \mathcal{G}_{[0,a]} + \mathcal{G}_{[b,\infty[}$$

On retrouve aussi quelques anneaux connus

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}^+ &= \mathcal{G}_{[0,\infty[} \\ \mathbf{B}_{rig}^\dagger &= \bigcup_{b>0} \mathcal{G}_{[b,\infty[}. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Précisions topologiques

**Lemme 2.4.**

1. Les sommes finies

$$\left\{ \sum_{n=0}^N a_n \left( \frac{Y^{ea}}{p} \right)^n + b_n \left( \frac{p}{Y^{eb}} \right)^n ; a_n, b_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+, N \in \mathbb{N} \right\}$$

forment un sous-ensemble dense de  $\mathcal{G}_{[b,a]}$ . Il en va donc de même de la sous-algèbre

$$\mathcal{G}_{[b,a]} \cap \tilde{\mathbf{A}} \left[ \frac{1}{p} \right] = \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \left( \frac{Y^{ea}}{p} \right)^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \left( \frac{p}{Y^{eb}} \right)^n ; a_n, b_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. La topologie de  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  est moins forte que la topologie  $p$ -adique.
3.  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  est séparé et complet.
4. L'anneau  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  est local d'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_{[b,a]} = \left\{ \sum_{n \geq 1} a_n \left( \frac{Y^{ea}}{p} \right)^n + b_n \left( \frac{p}{Y^{eb}} \right)^n ; a_n, b_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \right\} + W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$$

et de corps résiduel  $\bar{k}$ .

5. Tout élément de  $\mathfrak{m}_{[b,a]}$  est topologiquement nilpotent.
6. Les puissances de l'idéal

$$\mathfrak{m}_{[b,a]}^1 = \left\{ \sum_{n \geq 1} a_n \left( \frac{Y^{ea}}{p} \right)^n + b_n \left( \frac{p}{Y^{eb}} \right)^n ; a_n, b_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \right\} + Y^{e(a-b)} \tilde{\mathbf{A}}^+$$

forment une base de voisinages de 0 composée d'idéaux de  $\mathcal{G}_{[b,a]}$ .

7. L'anneau  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_{[b,a]}$  le complété  $p$ -adique de

$$\bigcup_{\alpha > a} \mathfrak{m}_{[b,\alpha]}$$

et de corps résiduel  $\bar{k}$ .

8. Tout élément de  $\mathfrak{m}_{[b,a]}$  est topologiquement nilpotent.

*Preuve :* Introduisons la notation

$$\mathcal{G}_{[b,a]}^{>N} = \left\{ \sum_{n \geq N} a_n \left( \frac{Y^{ea}}{p} \right)^n + \sum_{n \geq N} b_n \left( \frac{p}{Y^{eb}} \right)^n ; a_n, b_n \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \right\} \subset \mathcal{G}_{[b,a]}.$$

On rappelle alors qu'une base de voisinages de zéro dans  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  est donnée par

$$\left\{ \mathcal{G}_{[b,a]}^{>N} + p^k \mathcal{G}_{[b,a]} \right\}_{N,k \in \mathbb{N}}.$$

Ceci montre les deux premiers points. Le fait que  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  est séparé provient de ce que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[s,r]}$  l'est (cf. [Ber02]).

Pour ce qui est de la complétude de  $\mathcal{G}_{[b,a]}$ , la suite du lemme montre que la topologie est métrisable, mais on peut voir immédiatement à la forme des voisinages de zéro que toute série dont le terme général tend vers 0 converge.

On va montrer les points 4., 5. et 6. simultanément : on montre que  $\mathfrak{m}_{[b,a]}$  est un idéal, que tout élément de  $\mathfrak{m}_{[b,a]}$  a une puissance appartenant à  $\mathfrak{m}_{[b,a]}^1$  et on explicite les puissances de  $\mathfrak{m}_{[b,a]}^1$ , ce qui permet de conclure.

Écrivons maintenant le produit de deux éléments de  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  :

$$x = \sum_{n < 0} a_n \left( \frac{Y^{ea}}{p} \right)^{-n} + \sum_{n \geq 0} a_n \left( \frac{p}{Y^{eb}} \right)^n$$

on dira que  $x$  est l'élément de  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  associé à la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\tilde{\mathbf{A}}^+)^{\mathbb{Z}}$ . Soit encore  $y$  l'élément associé à une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , alors

$$xy = \sum_{n < 0} c_n \left( \frac{Y^{ea}}{p} \right)^{-n} + \sum_{n \geq 0} c_n \left( \frac{p}{Y^{eb}} \right)^n$$

est associé à la suite

$$c_n = \begin{cases} \sum_{k > 0} Y^{e(a-b)k} (a_{k+n} b_{-k} + a_{-k} b_{k+n}) + \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} & \text{si } n \geq 0 \\ \sum_{k > 0} Y^{e(a-b)k} (a_k b_{n-k} + a_{n-k} b_k) + \sum_{k=0}^{-n} a_{-k} b_{n+k} & \text{si } n \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ceci donne

$$c_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Y^{e(a-b)|n|} a_n b_{-n} \quad (2.2)$$

et montre que  $\mathfrak{m}_{[b,a]}$  est un idéal.

On suppose  $x \in \mathfrak{m}_{[b,a]}$ . Par le calcul précédent, on définit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  une suite  $(c_{n,k})_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que  $x^k$  est associé à  $(c_{n,k})_{n \in \mathbb{Z}}$ . Dire qu'il existe un  $k$  tel que  $x^k \in \mathfrak{m}_{[b,a]}^1$  c'est dire que le reste  $\bar{c}_{0,k} \in \tilde{\mathbf{E}}^+$  de  $c_{0,k}$  modulo  $p$  a une valuation supérieure ou égale à  $a - b$ . Or par l'égalité 2.2,

$$v_{\mathbf{E}}(\bar{c}_{0,k}) \geq \min(a - b, k v_{\mathbf{E}}(\bar{a}_0))$$

qui montre que  $x^k \in \mathfrak{m}_{[b,a]}^1$  pour  $k$  assez grand.

On va maintenant montrer que  $\mathfrak{m}_{[b,a]}^k$  est constitué d'éléments associés à des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, v_{\mathbf{E}}(\bar{a}_n) \geq g_{a,b}^k(n)$$

où

$$g_{a,b}^k(n) = \left\lfloor \frac{(k - |n| + 1)_+}{2} \right\rfloor (a - b) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k - |n| + 1}{2} \right\rfloor (a - b) & \text{si } |n| \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui vérifie la relation de récurrence

$$g_{a,b}^{k+1}(n) = \begin{cases} g_{a,b}^k(n-1) + a - b & \text{si } -k-1 \leq n \leq 0 \\ g_{a,b}^k(n+1) + a - b & \text{si } 0 \leq n \leq k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

ou encore

$$g_{a,b}^{k+1}(n) = \begin{cases} g_{a,b}^k(n+1) & \text{si } n < 0 \\ g_{a,b}^k(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}. \quad (2.4)$$

Remarquons aussi que  $g_{a,b}^k$  est paire et décroissante sur  $\mathbb{N}$ .

Soit donc  $x \in \mathfrak{m}_{[b,a]}^k$  associé à une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant la relation de récurrence précédente,  $y \in \mathfrak{m}_{[b,a]}^k$  associé à  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $xy \in \mathfrak{m}_{[b,a]}^{k+1}$  associé à  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Les équations 2.1 montrent que l'on a la relation pour  $n \geq 0$  (le cas  $n < 0$  produit le même calcul) :

$$v_{\mathbf{E}}(\bar{c}_n) \geq \inf \left\{ \begin{array}{ll} (a-b)r + g_{a,b}^k(n+r), & \text{pour } r > 0, \\ (a-b)r + g_{a,b}^k(-r), & \text{pour } r < 0, \\ g_{a,b}^k(r), & \text{pour } 0 \leq r < n, \\ g_{a,b}^k(n) + a - b & \end{array} \right\}$$

qui donne par parité puis décroissance de  $g_{a,b}^k$

$$v_{\mathbf{E}}(\bar{c}_n) \geq \inf \left\{ \begin{array}{ll} (a-b)r + g_{a,b}^k(n+r), & \text{pour } r > 0, \\ g_{a,b}^k(n-1) & \\ g_{a,b}^k(n) + a - b & \end{array} \right\}.$$

Or

$$(a-b)r + g_{a,b}^k(n+r) = (a-b) \left( r + \left\lfloor \frac{(k - |n+r| + 1)_+}{2} \right\rfloor \right)$$

est strictement croissante en  $r$  et

$$(a-b) + g_{a,b}^k(n+1) \geq g_{a,b}^{k+1}(n)$$

d'après 2.3. De même,

$$g_{a,b}^k(n) + a - b \geq g_{a,b}^{k+1}(n-1) \geq g_{a,b}^{k+1}(n)$$

et enfin, d'après 2.4,

$$g_{a,b}^k(n-1) = g_{a,b}^{k+1}(n).$$

Le minimum vaut donc bien  $g_{a,b}^{k+1}(n)$ , ce qui permet de conclure sur la description de  $\mathfrak{m}_{[b,a]}^k$ .

Cette description permet de montrer 6., d'où l'on déduit 5. et 4.

Enfin, 7. est une conséquence de 8., qu'il reste à montrer. Remarquons qu'un élément  $x \in \mathfrak{m}_{[b,a]}$  s'écrit

$$x = x_0 + px_1 ; \quad x_0 \in \mathfrak{m}_{[b,\alpha]}, x_1 \in \mathcal{G}_{[b,a]}$$

pour un  $\alpha > a$ . Il s'agit de montrer que

$$p^k x_0^n x_1^k \xrightarrow[k, n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Quand  $k$  tend vers l'infini, c'est évident ; pour le cas de  $n$ , il faut remarquer que la convergence de  $x_0^n$  vers 0 dans  $\mathcal{G}_{[b,\alpha]}$  implique pour  $n$  assez grand l'appartenance de  $x_0^n$  à  $p^N \mathcal{G}_{[b,\alpha']} + \mathcal{G}_{[b,\infty]}^{>N}$  pour  $\alpha > \alpha' > a$  qui permet de conclure.  $\square$

Le lemme suivant permet de lier les algèbres  $\mathcal{G}_{[b,a]}$  aux anneaux de Fontaine.

**Lemme 2.5.**

1.  $\mathcal{G}_{[0,p]}$  s'injecte continuellement dans  $A_{cris}$ .
2. Les Frobenius  $\varphi$  de  $A_{cris}$  et  $\varphi_{\mathcal{G}}$  coïncident sur  $\mathcal{G}_{[0,p]}$ .
3. Tout élément non nul de  $\mathcal{G}_{Y,[0,p]}$  est inversible dans  $\mathcal{G}_{Y,[p-1,p-1[} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ .
4. L'élément  $t/X$  converge dans  $\mathcal{G}_{[0,p]}$  et  $y$  est inversible.

*Preuve :* Pour le premier point, il s'agit de montrer que  $\frac{Y^{pen}}{p^n} \in A_{cris}$  pour tout  $n$  et converge vers 0. Soit  $E_\pi$  un polynôme d'Eisenstein de  $\pi$ , c'est un polynôme de degré  $e$  et  $E_\pi(Y)$  engendre  $W^1(\tilde{\mathbf{E}}^+)$  si bien que  $A_{cris}$  est le complété  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{E_\pi(Y)^n}{n!}]$  et il est immédiat que  $\frac{Y^{pen}}{p^n}$  appartient à cet anneau et converge  $p$ -adiquement vers 0.

Le second point est une conséquence immédiate du premier.

Soit maintenant  $x \in \mathcal{G}_{Y,[0,p]}$ , alors il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\tilde{\mathbf{A}}^+ \left[\frac{1}{p}\right]\right)^{\mathbb{N}}$  telle que

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y^n$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N} ; e p v_p(a_n) + n \geq 0.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} ; e(p-1)v_p(a_n) + n \geq \frac{n}{p}$$

et pour  $x$  non nul, la quantité  $e(p-1)v_p(a_n) + n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , elle atteint ainsi un minimum  $K$  un nombre fini de fois et on fixe  $n_0$  le plus grand entier pour lequel  $K = e(p-1)v_p(a_{n_0}) + n_0$ , si bien que

$$e(p-1)v_p(a_n/a_{n_0}) + n - n_0 \geq 0 \quad \text{si } n \leq n_0 \tag{2.5}$$

$$e(p-1)v_p(a_n/a_{n_0}) + n - n_0 > 0 \quad \text{si } n > n_0 \tag{2.6}$$

et

$$\forall n > n_0 ; e(p-1)v_p(a_n/a_{n_0}) + n - n_0 > \frac{n}{p} - K$$

d'où il vient que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{e(p-1)v_p(a_n/a_{n_0}) + n - n_0}{n - n_0} \geq \frac{1}{p},$$

qui combiné à 2.6 montre l'existence de  $0 < \lambda < 1$  tel que

$$e(p-1)v_p(a_n/a_{n_0}) + n - n_0 \geq \lambda(n - n_0)$$

d'où

$$e \frac{p-1}{1-\lambda} v_p(a_n/a_{n_0}) + n - n_0 \geq 0.$$

Ceci montre que pour  $a = \frac{p-1}{1-\lambda} > p-1$ ,

$$\sum_{n > n_0} \frac{a_n}{a_{n_0}} Y^{n-n_0} \in \mathfrak{m}_{[0,a]}.$$

L'inégalité 2.5 montre encore que

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{a_{n_0}} Y^{n-n_0} \in \mathfrak{m}_{[p-1, \infty[}$$

et au final

$$\sum_{n \neq n_0} \frac{a_n}{a_{n_0}} Y^{n-n_0} \in \mathfrak{m}_{[p-1, a]}.$$

Ainsi,

$$x = a_{n_0} Y^{n_0} (1 + \epsilon) ; \epsilon \in \mathfrak{m}_{[p-1, a]}$$

est bien inversible dans  $\mathcal{G}_{Y, [p-1, a]} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \subset \mathcal{G}_{Y, [p-1, p-1[} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ .

Enfin, remarquons que

$$X = [\varepsilon - 1] + pv = Y^{ep/(p-1)} u + pv ; u, v \in \tilde{\mathbf{A}}^+$$

si bien que

$$X^{p-1} = Y^{ep} u' + pv' ; u', v' \in \tilde{\mathbf{A}}^+$$

d'où l'on déduit que pour  $s$  premier à  $p$ ,

$$\begin{aligned} \frac{X^{p^r s-1}}{p^r s} &= \frac{X^{p^r(s-1)}}{s} \frac{X^{p^r-1}}{p^r} \\ &= X^{p^r(s-1)} \sum_{k=0}^{p^r-1} \frac{Y^{pek \frac{p^r-1}{p-1}-k}}{p} p^r u_k \\ &= X^{p^r(s-1)} \sum_{k=0}^{p^r-1} \frac{Y^{pek \frac{p^r-1}{p-1}-r}}{p} p^k u_k \end{aligned}$$

où les  $u_k$  sont dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ . Or

$$\frac{p^r - 1}{p - 1} \geq r$$

de sorte que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$X^{n-1}/n \in \mathcal{G}_{[0, p]}$$

et  $\frac{p^r-1}{p-1} - r$  tend vers  $+\infty$  avec  $r$ , ce qui montre que  $X^{n-1}/n$  tend  $p$ -adiquement vers 0 dans  $\mathcal{G}_{[0, p]}$  et achève la preuve du lemme.  $\square$

## 2.4 Le symbole de Hilbert d'un groupe formel

### 2.4.1 L'accouplement associé au symbole de Hilbert

Dans ce paragraphe nous exprimons le symbole de Hilbert de  $F$  en termes du complexe de Herr attaché à  $F[p^M]$ .

Rappelons que l'on définit le symbole de Hilbert d'un groupe formel comme un accouplement :

$$\begin{aligned} K^* \times F(\mathfrak{m}_K) &\rightarrow F[p^M] \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha, \beta)_{F,M} = r(\alpha)(\beta_1) -_F \beta_1 \end{aligned}$$

où  $\alpha_1 \in F(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p})$  vérifie  $p^M \text{id}_F \beta_1 = \beta$  et  $r : K^* \rightarrow G_K^{\text{ab}}$  est l'application de réciprocité du corps de classes local.

En fait, on va s'intéresser à l'accouplement

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{m}_K) \times G_K &\rightarrow F[p^M] \\ (\beta, g) &\mapsto (\beta, g)_{F,M} = g\beta_1 -_F \beta_1 \end{aligned}$$

où  $\alpha_1 \in F(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p})$  vérifie  $p^M \text{id}_F \beta_1 = \beta$ . On a alors

$$(\beta, r(\alpha))_{F,M} = (\alpha, \beta)_{F,M}.$$

Introduisons

$$\mathcal{R}(F) = \{(x_i)_{i \geq 0} \in F(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}) \text{ tels que } x_0 \in F(\mathfrak{m}_K) \text{ et } (p \text{id}_F)x_{i+1} = x_i \ \forall i \geq 0\}$$

alors le symbole de Hilbert se relève en un accouplement :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(F) \times G_K &\rightarrow T(F) \\ (x, g) &\mapsto (x, g)_{\mathcal{R}(F)} = (gx_i -_F x_i)_i \end{aligned}$$

avec donc  $((x, g)_{\mathcal{R}(F)})_M = (x_0, g)_{F,M}$  pour tout  $x = (x_i) \in \mathcal{R}(F)$ .

On peut voir cet accouplement comme l'application de connexion

$$F(\mathfrak{m}_K) \rightarrow H^1(K, T(F))$$

dans la suite exacte longue associée à la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow T(F) \rightarrow \varprojlim F(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}) \rightarrow F(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}) \rightarrow 0$$

où les applications de transition dans la limite projective sont  $p \text{id}_F$  et où la dernière flèche est la projection sur la première composante. L'anneau  $\mathcal{R}(F)$  est alors simplement l'image réciproque de  $F(\mathfrak{m}_K)$  par la surjection  $\varprojlim F(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}) \rightarrow F(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p})$ .

Soit maintenant  $x \in F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  tel que  $\theta([x]) \in F(\mathfrak{m}_K)$ . Alors pour tout  $g \in G_K$ ,

$$(g -_F 1)\delta(x) \in F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))^{(\mathcal{A}^* - p)l_{\mathcal{A}}=0} \simeq T(F)$$

où  $\delta$  est l'application définie à la fin du paragraphe 2.2. Le diagramme suivant est commutatif



$$\begin{array}{ccc}
 F(W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))_K^{(\mathcal{A}^*-p)l_{\mathcal{A}}=0} \times G_K & \longrightarrow & F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))^{(\mathcal{A}^*-p)l_{\mathcal{A}}=0} \\
 \delta \times \text{id} \uparrow & & \uparrow j \\
 F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})_K \times G_K & & \\
 \iota \times \text{id} \downarrow & & \\
 \mathcal{R}(F) \times G_K & \longrightarrow & T(F)
 \end{array}$$

où  $\iota(x) = (\theta([p^{-s}\text{id}_F(x)]))_s$  et où  $F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})_K$  (respectivement  $F(W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))_K$ ) désigne l'ensemble des  $x \in F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  (respectivement  $F(W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))$ ) avec  $\theta([x]) \in K$  (respectivement  $\theta(x) \in K$ ) et où le premier accouplement est simplement

$$(u, g) \mapsto (g -_F 1)u.$$

Fixons maintenant  $\alpha \in F(\mathfrak{m}_K)$  et un relèvement  $\xi$  de  $\alpha$  dans  $F(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  qui vérifie donc

$$\theta(\xi) = \alpha.$$

On a obtenu l'égalité

$$j((\iota(\xi), g]_{\mathcal{R}(F)}) = (g -_F 1)\delta(\xi)$$

pour tout  $g \in G_K$ .

Choisissons maintenant  $\beta \in F(YW[[Y]])$  tel que

$$\theta(\beta) = \alpha = \theta(\xi).$$

Alors pour tout  $h \in G_L$ ,

$$(h - 1)(\delta(\xi) -_F \beta) = j((\iota(\xi), h]_{\mathcal{R}(F)}).$$

De plus,  $\delta(\xi) -_F \beta \in F(W^1(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}))$  donc

$$l_{\mathcal{A}}(\delta(\xi) -_F \beta) \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^d$$

et

$$m_{\mathcal{A}}(\delta(\xi) -_F \beta) = \sum_{u \geq 1} F'_u \frac{\varphi^u(l_{\mathcal{A}}(\delta(\xi) -_F \beta))}{p}$$

converge dans  $A_{\text{cris}}^{h-n}$ . Posons alors

$$\Lambda = \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\delta(\xi) -_F \beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\delta(\xi) -_F \beta) \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h.$$

Ce sont là les coordonnées d'un élément  $\lambda$  de  $D_{\text{cris}}(T(F)) \otimes A_{\text{cris}}$  dans la base  $(o^1, \dots, o^h)\mathcal{V}^{-1}$ . Et, pour tout  $h \in G_L$ ,

$$(h -_F 1)\lambda = (\iota(\xi), h]_{\mathcal{R}(F)}. \quad (2.7)$$

De fait, on peut voir l'accouplement  $(\ , \ ]_{\mathcal{R}(F)}$  comme une application

$$\mathcal{R}(F) \rightarrow H^1(K, T(F)),$$

et en réduisant modulo  $p^M$ ,

$$\mathcal{R}(F) \rightarrow H^1(K, F[p^M]).$$

### 2.4.2 La matrice des périodes approchée

Nous allons maintenant calculer explicitement le symbole de Hilbert de  $F$ , *i.e.* l'image de  $\iota(\xi)$  dans  $H^1(K, F[p^M])$  qui coïncide avec celle de  $\alpha$ . Pour ce faire, il faut donner un triplet du  $H^1$  du complexe de Herr de  $F[p^M]$  calculant le cocycle correspondant à l'image de  $\iota(\xi)$ . Rappelons que si l'on écrit un tel triplet  $(x, y, z)$ , alors le cocycle associé sera

$$g \mapsto (g-1)(-b) + \gamma^n \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} z + \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} y$$

où  $g|_F = \gamma^n \tau^m$  et  $b \in F[p^M] \otimes \tilde{\mathbf{A}}$  est une solution de

$$(\varphi - 1)b = x.$$

En particulier, l'image d'un  $h \in G_L$  par ce cocycle est  $(h-1)(-b)$ . Commençons donc par trouver un  $b \in T(F) \otimes \tilde{\mathbf{A}}$  tel que

$$\forall h \in G_L, \quad (h-1)b \equiv -(\iota(\xi), h]_{\mathcal{R}(F)} \pmod{p^M}.$$

L'égalité 2.7 nous incite à construire  $b$  comme une approximation de  $-\lambda$ . En fait, nous allons construire  $x$  en approchant  $(\varphi - 1)(-\lambda)$ , qui a pour coordonnées dans la base  $(o^1, \dots, o^h)$

$$\mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} (\frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, le Lemme 2.2. montre que l'action du Frobenius  $\phi$  sur la base  $(o^1, \dots, o^h)$  s'écrit dans la base  $(o^1, \dots, o^h)\mathcal{V}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}^*}{p} & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix}.$$

Du fait que  $(o^1 = (o_n^1)_n, \dots, o^h)$  est la base fixée de  $T(F)$ ,  $(o_M^1, \dots, o_M^h)$  est une base de  $F[p^M]$  et on fixe encore  $\hat{o}_M^1, \dots, \hat{o}_M^h$  éléments de  $F(YW[[Y]])$  tels que pour tout  $i$ ,

$$\theta(\hat{o}_M^i) = o_M^i.$$

On définit alors la matrice

$$\mathcal{V}_Y = \begin{pmatrix} p^M l_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^1) & \dots & p^M l_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^h) \\ p^M m_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^1) & \dots & p^M m_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^h) \end{pmatrix}$$

dont les coefficients appartiennent à  $A_{cris}$ , et même plus précisément à  $W[[\frac{Y^{pe}}{p}]] = \mathcal{G}_{[0,p]}$ . D'après le Lemme 2.5.,  $\mathcal{V}_Y$  est inversible dans  $\mathcal{G}_{Y,[p-1,p-1]}$ . On a de plus le lemme suivant :

**Lemme 2.6.**

1.  $X\mathcal{V}_Y^{-1}$  est à coefficients dans  $\mathcal{G}_{[0,p]} + p^{M-1}\mathfrak{m}_{[\frac{1}{p-1},\infty[} \subset \mathcal{G}_{[\frac{1}{p-1},p]}$  et donc

$$\varphi_{\mathcal{G}}(X\mathcal{V}_Y^{-1}) \in \mathcal{G}_{[p/(p-1),p]}.$$

2. La matrice  $\mathcal{V}_Y^{-1}$  est à coefficients dans  $\frac{1}{Y^{ep/(p-1)}}\mathcal{G}_{[1,p]}$  et

$$\mathcal{V}_Y^{-1} \equiv \mathcal{V}^{-1} \pmod{\frac{p^{M-1}}{Y^{ep/(p-1)}}\mathfrak{m}_{[1,p]}}.$$

3. La partie principale  $\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  de  $\mathcal{V}_Y^{-1}$  est à coefficients  $p$ -entiers et sa dérivée  $\frac{d}{dY}\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  est à coefficients dans  $p^M\tilde{\mathbf{A}}$ .

*Preuve :* On reprend la stratégie du paragraphe 3.4. de [Abr97]. Rappelons qu'Abra-shkin y montre que

$$\begin{aligned} p^M l_{\mathcal{A}}(\delta_M^i) &\in \left( E_{\pi}(Y)YW[[Y]] + \frac{E_{\pi}(Y)^p}{p}W[[Y]] \left[ \left[ \frac{Y^{ep}}{p} \right] \right] \right)^n \\ p^M m_{\mathcal{A}}(\delta_M^i) &\in \left( YW[[Y]] + \frac{Y^{ep}}{p}W[[Y]] \left[ \left[ \frac{Y^{ep}}{p} \right] \right] \right)^{h-n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(o^i) - p^M l_{\mathcal{A}}(\delta_M^i) &\in p^M \left( E_{\pi}(Y)W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + \frac{E_{\pi}(Y)^p}{p}\tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \left[ \frac{Y^{ep}}{p} \right] \right] \right)^n \\ \mathbf{m}(o^i) - p^M m_{\mathcal{A}}(\delta_M^i) &\in p^M \left( W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + \frac{Y^{ep}}{p}\tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \left[ \frac{Y^{ep}}{p} \right] \right] \right)^{h-n}. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant  $\mathcal{V}^D$  la matrice du groupe dual de  $F$ . Elle vérifie la relation :

$${}^t\mathcal{V}^D \mathcal{V} = {}^tI_h.$$

Et on peut alors écrire

$${}^t\mathcal{V}^D \mathcal{V}_Y \equiv {}^tI_h \pmod{p^M \left( E_{\pi}(Y)W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + \frac{E_{\pi}(Y)^p}{p}\tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \left[ \frac{Y^{ep}}{p} \right] \right] \right)}$$

en particulier,

$${}^t\mathcal{V}^D \mathcal{V}_Y \equiv {}^tI_h \pmod{p^M \left( Y^e W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + \frac{Y^{ep}}{p}\tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \left[ \frac{Y^{ep}}{p} \right] \right] \right)}.$$

Remarquons maintenant que, d'après le lemme 2.5., l'élément  $t/X$  converge dans  $\mathcal{G}_{[0,p]}^*$ , si bien que comme

$$X = \omega[\varepsilon^{1/p} - 1] = E_{\pi}(Y)Y^{e/(p-1)}v ; v \in \mathcal{G}_{[\frac{1}{p-1},\infty]}^*,$$

on a

$${}^t\mathcal{V}^D \mathcal{V}_Y = t(I_h - p^M u)$$

avec

$$u \in \frac{E_\pi(Y)}{t} W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + \frac{Y^{ep}}{pt} \mathcal{G}_{[0,p]} \subset \frac{1}{Y^{e/(p-1)}} \mathfrak{m}_{[\frac{1}{p-1}, p]} + \frac{Y^{e\frac{p^2-2p}{p-1}}}{p} \mathcal{G}_{[\frac{1}{p-1}, p]} \subset \frac{1}{p} \mathfrak{m}_{[\frac{1}{p-1}, p]}$$

d'où

$$\mathcal{V}_Y^{-1} = \frac{1}{t} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} p^{Mn} u^n \right) {}^t\mathcal{V}^D \in \frac{1}{t} \mathcal{G}_{[\frac{1}{p-1}, p]}$$

d'où l'on déduit le premier point ; et même

$$\mathcal{V}_Y^{-1} \equiv \mathcal{V}^{-1} \pmod{\frac{p^{M-1}}{t} \mathfrak{m}_{[\frac{1}{p-1}, p]}}$$

soit

$$\mathcal{V}_Y^{-1} \in \frac{1}{t} \mathcal{G}_{[0,p]} + \frac{p^{M-1}}{t} \mathfrak{m}_{[\frac{1}{p-1}, p]}.$$

Reprenons maintenant

$$t = E_\pi(Y) \varphi^{-1}(X) u' ; u' \in \mathcal{G}_{[0,p]}^*$$

et remarquons que comme  $E_\pi$  est un polynôme d'Eisenstein,  $E_\pi(Y)$  et  $Y^e$  sont associés dans  $\mathcal{G}_{[1,\infty[}$  ; au final, avec le calcul ci-dessus, on déduit que  $t$  et  $Y^{ep/(p-1)}$  sont associés dans  $\mathcal{G}_{[1,p]}$ . Ainsi,

$$\mathcal{V}_Y^{-1} \in \frac{1}{Y^{ep/(p-1)}} \mathcal{G}_{[1,p]} + \frac{p^{M-1}}{Y^{ep/(p-1)}} \mathfrak{m}_{[1,p]}.$$

Déduisons encore que  $\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  est à coefficients  $p$ -entiers. Il s'agit de montrer qu'un élément de la forme

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^n \in \mathcal{G}_{Y, [p-1, p-1[} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \bigcap \frac{1}{Y^{ep/(p-1)}} \mathcal{G}_{[1,p]}$$

vérifie  $a_n \in \mathbb{Z}_p$  pour tout  $n \leq 0$ . Mais cela signifie que

$$Y^{ep/(p-1)} x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n Y^{n+ep/(p-1)} \in \mathcal{G}_{[1,p]}$$

ainsi, si  $v_p(a_n) \leq 1$ , on a l'inégalité

$$n + ep/(p-1) \geq ep$$

d'où

$$n \geq \frac{(p-2)ep}{p-1} > 0$$

et  $\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  est à coefficients  $p$ -entiers.

Pour le dernier point, on reprend l'argument du Lemme 4.5.4 de [Abr97]. On écrit

$$\frac{d}{dY} \mathcal{V}_Y^{(-1)} = -\mathcal{V}_Y^{(-1)} \left( \frac{d}{dY} \mathcal{V}_Y \right) \mathcal{V}_Y^{(-1)}$$

et comme les différentielles de  $l_{\mathcal{A}}$  et  $m_{\mathcal{A}}$  sont à coefficients dans  $W$ , on a

$$\frac{d}{dY} \mathcal{V}_Y \in p^M M_h(W[[Y]])$$

si bien que

$$\frac{d}{dY} \mathcal{V}_Y^{(-1)} \in \mathcal{G}_{Y, [p-1, p-1]} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \bigcap \frac{1}{Y^{2ep/(p-1)}} \mathcal{G}_{[1, p]}$$

et le même argument que ci-dessus permet de conclure (on obtient l'inégalité  $n \geq \frac{(p-3)ep}{p-1} \geq 0$ ).  $\square$

Remarquons enfin que comme

$$\left( \frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1 \right) l_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \in \mathbf{X}W[[\mathbf{X}]]^d,$$

on a

$$\left( \frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1 \right) l_{\mathcal{A}}(\beta) \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})^d,$$

si bien que

$$\mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} \left( \frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1 \right) l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbf{A}}^h.$$

### 2.4.3 Calcul explicite du symbole de Hilbert

Nous en venons à la proposition qui donne explicitement le triplet recherché. L'ingrédient de base en est la Proposition 3.8 de [Abr97] qui permet de calculer la coordonnée  $x$  du triplet et de montrer que  $y$  est nulle. Toutefois, pour obtenir  $z$ , il s'agit de pousser les calculs d'Abrashkin à l'ordre supérieur. En effet, si l'on sait qu'il appartient à  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ , on a besoin pour le calcul final de connaître précisément sa valeur modulo  $XW(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ .

Rappelons le résultat d'Abrashkin que nous allons utiliser

**Proposition 2.2.**

Soient  $U$  la partie principale de  $\mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} \left( \frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1 \right) l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\hat{x} = (o^1, \dots, o^h)U$ . Alors

1.  $U \in (W[[\frac{1}{Y}]] \cap \tilde{\mathbf{A}})^h$
2. Si  $\hat{b} \in T(F) \otimes \tilde{\mathbf{A}}$  est une solution de  $(\varphi - 1)\hat{b} = \hat{x}$  alors pour tout  $g \in G_K$ ,

$$(g - 1)\hat{b} \equiv (\beta(\pi), g]_{F, M} \pmod{p^M \tilde{\mathbf{A}} + W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}.$$

Le premier point provient de la Proposition 3.7 et le second de la Proposition 3.8 de [Abr97].

Nous utiliserons ce résultat sous la forme précisée

**Proposition 2.3.**

Soit  $\beta \in F(YW[[Y]])$  et  $\alpha = \theta(\beta) = \beta(\pi) \in F(\mathfrak{m}_K)$ . Posons

$$x = (o^1, \dots, o^h) \mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1) l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \in \tilde{D}_L(T(F))$$

alors il existe

$$z \in \tilde{D}_L(T(F)) \cap T(F) \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$$

unique modulo  $p^M$  tel que le triplet  $(x, 0, z)$  représente l'image de  $\alpha$  par l'application de Kummer  $F(\mathfrak{m}_K) \rightarrow H^1(K, F[p^M])$ .

De plus,  $z$  est congru à

$$XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \pmod{XW(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}.$$

#### 2.4.4 Démonstration

On utilise la Proposition 2.2., et on remarque que

$$\hat{x} - x \in T(F) \otimes YW[[Y]] \subset (\varphi - 1)(T(F) \otimes YW[[Y]]).$$

Ainsi, si  $b \in T(F) \otimes \tilde{\mathbf{A}}$  vérifie  $(\varphi - 1)b = x$ , alors on a encore pour tout  $g \in G_K$ ,

$$(g - 1)b \equiv (\alpha, g]_{F, M} \pmod{p^M \tilde{\mathbf{A}} + W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}.$$

Mais alors pour tout  $h \in G_L$ ,

$$(h - 1)b \equiv (\alpha, h]_{F, M} \pmod{p^M T(F)}$$

puisque  $(h - 1)b \in \ker(\varphi - 1) = T(F)$ .

On en déduit qu'il existe  $y, z \in \tilde{D}_L(T(F))$  uniques modulo  $p^M$  tels que le triplet  $(x, y, z)$  représente l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(K, F[p^M])$ ; en effet soit  $(x_1, y_1, z_1)$  un tel triplet, et  $b_1 \in T(F) \otimes \tilde{\mathbf{A}}$  une solution de  $(\varphi - 1)b_1 = x_1$  alors pour tout  $h \in G_L$ ,

$$(h - 1)(b_1 - b) \equiv 0 \pmod{p^M},$$

$$\text{donc, } b_1 - b \in \tilde{D}_L(F[p^M]),$$

ce qui montre que

$$(x, y_1 + (\gamma - 1)(b - b_1), z_1 + (\tau - 1)(b - b_1))$$

représente la même classe que  $(x_1, y_1, z_1)$  et, pour  $x$  fixé, que c'est le seul. Déterminons  $y$  : si  $\tilde{\gamma}$  est un relèvement de  $\gamma$  alors

$$(\tilde{\gamma} - 1)(-b) + y = (\alpha, \tilde{\gamma}]_{F,M} \equiv (\tilde{\gamma} - 1)(-b) \pmod{p^M \tilde{\mathbf{A}} + W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}$$

d'où, comme  $(\tilde{\gamma} - 1)(-b) \in T(F)$ ,

$$y \in T(F) \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) \cap T(F) = \{0\}.$$

De même, si  $\tilde{\tau}$  est un relèvement de  $\tau$  alors

$$(\tilde{\tau} - 1)(-b) + z = (\alpha, \tilde{\tau}]_{F,M} \equiv (\tilde{\tau} - 1)(-b) \pmod{p^M \tilde{\mathbf{A}} + W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}$$

d'où  $z \in T(F) \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ .

Ainsi  $z$  est un élément de  $T(F) \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  vérifiant

$$(\tau - 1)x = (\varphi - 1)z.$$

Cela détermine  $z$  de manière unique puisque  $\varphi - 1$  est injectif sur  $T(F) \otimes W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ . Pour préciser  $z$ , nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.7.**

1. La matrice  $X\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  est à coefficients dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+ + p^M \tilde{\mathbf{A}}$ .
2. Pour tout  $U \in W[[Y]]$ , on a la congruence

$$(\tau - 1)\mathcal{V}_Y^{(-1)}U \equiv XY\mathcal{V}_Y^{(-1)}\frac{dU}{dY} \pmod{XW(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + p^M \tilde{\mathbf{A}}}.$$

3. Il existe  $u \in \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}$  tel que

$$\varphi_{\mathcal{G}}(X\mathcal{V}_Y^{-1}) = (\varphi_{\mathcal{G}}(X)\mathcal{V}_Y^{-1}\mathcal{E}^{-1} + p^M u) \begin{pmatrix} \frac{1}{p}I_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix}$$

*Preuve du lemme :* La preuve de 1. est la même que celle du  $d)$  de la Proposition 3.7 de [Abr97]. Écrivons-la ainsi : on sait d'une part que  $\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  donc aussi  $X\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  est à coefficients  $p$ -entiers donc dans  $\tilde{\mathbf{A}}$  et que  $\mathcal{U} = X(\mathcal{V}_Y^{-1} - \mathcal{V}_Y^{(-1)})$  est à coefficients dans  $\mathcal{G}_{[0, p-1]} \otimes \mathbb{Q}_p$ . D'autre part, d'après le Lemme 2.6.,

$$X\mathcal{V}_Y^{-1} \in M_h(\mathcal{G}_{[0, p]} + p^{M-1}\mathcal{G}_{[1/(p-1), \infty[}) .$$

Remarquons que

$$\mathcal{G}_{[1/(p-1), \infty[} = \tilde{\mathbf{A}}^+ \left[ \left[ \frac{p}{Y^{e/(p-1)}} \right] \right] = \tilde{\mathbf{A}}^+ + \frac{p}{Y^{e/(p-1)}}\mathcal{G}_{[1/(p-1), \infty[}$$

Ainsi l'on peut écrire

$$X\mathcal{V}_Y^{-1} = M_1 + M_2 + p^M M_3$$

avec  $M_1$  à coefficients dans  $\mathcal{G}_{[0,p]}$ ,  $M_2$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et  $M_3$  dans  $\frac{1}{Ye/(p-1)}\mathcal{G}_{[1/(p-1),\infty[} \subset \tilde{\mathbf{A}}$ . Alors

$$X\mathcal{V}_Y^{(-1)} - p^M M_3 = M_1 + M_2 - \mathcal{U}$$

est à coefficients dans  $\tilde{\mathbf{A}} \cap \mathcal{G}_{[0,p-1[} \otimes Q_p = \tilde{\mathbf{A}}^+$ , comme souhaité.

Pour le 3., on commence par préciser  $(\tau - 1)\mathcal{V}_Y^{(-1)}$ , pour cela on remarque que si  $f(Y)$  est une série de  $W\{\{Y\}\} \cap \tilde{\mathbf{A}}$ ,

$$(\tau - 1)f(Y) = \sum_{n \geq 1} \frac{(XY)^n}{n!} f^{(n)}(Y)$$

Ainsi pour  $\mathcal{V}_Y^{(-1)}$  :

$$(\tau - 1)\mathcal{V}_Y^{(-1)} = XY \frac{d}{dY} \mathcal{V}_Y^{(-1)} + \frac{(XY)^2}{2} \frac{d^2}{dY^2} \mathcal{V}_Y^{(-1)} + \sum_{n \geq 3} \frac{(XY)^n}{n!} \frac{d^n}{dY^n} \mathcal{V}_Y^{(-1)}$$

Il s'agit donc d'estimer la quantité  $\frac{(XY)^n}{n!} \frac{d^n}{dY^n} \mathcal{V}_Y^{(-1)}$ . Or, le Lemme 2.6. montre que

$$\frac{d}{dY} \mathcal{V}_Y^{-1} = p^M \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W} \mathcal{V}_Y^{-1},$$

où  $\widetilde{W} \in W[[Y]]$  et la partie principale de  $\mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W} \mathcal{V}_Y^{-1}$  est entière. Ainsi, d'une part

$$XY \frac{d}{dY} \mathcal{V}_Y^{(-1)} + \frac{(XY)^2}{2} \frac{d^2}{dY^2} \mathcal{V}_Y^{(-1)} \in p^M \tilde{\mathbf{A}}$$

et d'autre part on peut écrire

$$\frac{d^n}{dY^n} \mathcal{V}_Y^{-1} = \sum_{k=1}^n p^{Mk} w_{n,k}$$

où les  $w_{n,k}$  sont des sommes de termes de la forme

$$\mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}_{n,1} \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}_{n,2} \dots \widetilde{W}_{n,k} \mathcal{V}_Y^{-1},$$

où les  $\widetilde{W}_{n,i} \in W[[Y]]$  sont des dérivées de  $\widetilde{W}$ .

Rappelons que  $\mathcal{V}_Y^{-1}$  est à coefficients dans  $\frac{1}{X} (\mathcal{G}_{[0,p]} + p^{M-1} \mathfrak{m}_{[1/(p-1),p]})$ , alors

$$\mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}_{n,1} \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}_{n,2} \dots \widetilde{W}_{n,k} \mathcal{V}_Y^{-1} \in M_h \left( \frac{1}{X^{k+1}} \mathcal{G}_{[0,p]} + p^{M-1} \left( \frac{1}{X^{k+1}} \mathfrak{m}_{[1/(p-1),p]} \right) \right).$$

Supposons  $1 < k < n - 1$ . Comme

$$v_p(n!) \leq \lfloor n/(p-1) \rfloor = n',$$

il existe un  $u \in \mathbb{Z}_p$  tel que

$$p^{Mk} \frac{(XY)^n}{n!} = Y^n X^{k+2} u \frac{X^{n-k-2}}{p^{n'-Mk}}.$$



Comme  $p > 2$  et  $k > 1$ ,

$$(n' - Mk)(p - 1) \leq n - k - 2 \text{ et } \frac{X^{n-k-2}}{p^{n'-Mk}} \in W \left[ \left[ \frac{X^{p-1}}{p} \right] \right] \subset \mathcal{G}_{[0,p]}.$$

Ainsi,

$$p^{Mk} \frac{(XY)^{n-1}}{n!} w_{n,k} \in \mathfrak{m}_{[0,p]} + p^{M-1} \mathfrak{m}_{[1/(p-1),p]}.$$

Si maintenant  $k = 1$ , on écrit

$$w_{n,1} = \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} \widetilde{W} \mathcal{V}_Y^{-1} = (n-1)! \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}' \mathcal{V}_Y^{-1}$$

et

$$\frac{(XY)^{n-1}}{n!} p^M w_{n,1} = \frac{(XY)^{n-1}}{n} \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}' \mathcal{V}_Y^{-1} = \frac{X^{n-p}}{n} Y^n X^{p-1} \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}' \mathcal{V}_Y^{-1}$$

est à coefficients dans  $\mathfrak{m}_{[0,p]} + p^{M-1} \mathfrak{m}_{[1/(p-1),p]}$  comme précédemment.

Pour  $k = n$ , il est immédiat que

$$w_{n,n} = n! \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}_{n,1} \mathcal{V}_Y^{-1} \widetilde{W}_{n,2} \dots \widetilde{W}_{n,n} \mathcal{V}_Y^{-1}$$

où pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\widetilde{W}_{n,i} = \widetilde{W}$ , si bien que

$$\frac{(XY)^n}{n!} p^{Mn} w_{n,n} \in p^{Mn} \frac{1}{X} (\mathcal{G}_{[0,p]} + p^{M-1} \mathfrak{m}_{[1/(p-1),p]}).$$

Enfin, pour  $k = n - 1$ , comme  $v_p(n!) \leq n/(p-1) \leq n-1$ ,

$$\frac{(XY)^n}{n!} p^{M(n-1)} w_{n,n-1} \in Y^n (\mathcal{G}_{[0,p]} + p^{M-1} \mathcal{G}_{[1/(p-1),p]}).$$

Le même raisonnement que pour 1. montre alors que pour tout  $n > 2$ ,

$$\frac{(XY)^n}{n!} \frac{d^n}{dY^n} \mathcal{V}_Y^{(-1)} \in XW(\mathfrak{m}_{\mathbf{E}}) + p^M \tilde{\mathbf{A}}$$

d'où

$$(\tau - 1) \mathcal{V}_Y^{(-1)} \in XW(\mathfrak{m}_{\mathbf{E}}) + p^M \tilde{\mathbf{A}}.$$

Le 2. se déduit donc de ce que

$$(\tau - 1) \mathcal{V}_Y^{(-1)} U = \left( (\tau - 1) \mathcal{V}_Y^{(-1)} \right) \tau U + \mathcal{V}_Y^{(-1)} (\tau - 1) U$$

et de

$$(\tau - 1) U \equiv XY \frac{dU}{dY} \pmod{XW(\mathfrak{m}_{\mathbf{E}})}.$$

Reprenons maintenant les calculs du Lemme 2.6. :

$$X \mathcal{V}_Y^{-1} = \frac{X}{t} (I_h + p^{M-1} u_1)^t \mathcal{V}^D$$

avec  $u_1 \in \mathfrak{m}_{[\frac{1}{p-1}, p]}$ . Et comme  $\mathcal{V}^D$  est à coefficients dans  $\mathcal{G}_{[0, p]} \subset A_{cris}$  où  $\varphi_{\mathcal{G}}$  et  $\varphi$  coïncident, on a dans  $\mathcal{G}_{[p/(p-1), p]}$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{G}}(X\mathcal{V}_Y^{-1}) &= \varphi_{\mathcal{G}}\left(\frac{X}{t}\right)(I_h + p^M \varphi_{\mathcal{G}}(v_1)) \varphi_{\mathcal{G}}({}^t\mathcal{V}^D) \\ &= \varphi_{\mathcal{G}}\left(\frac{X}{t}\right)(I_h + p^M \varphi_{\mathcal{G}}(v_1)) p {}^t\mathcal{V}^D \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{p}I_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix} \\ &= \varphi_{\mathcal{G}}\left(\frac{X}{t}\right)(I_h + p^M \varphi_{\mathcal{G}}(v_1))(I_h - p^M v) p t \mathcal{V}_Y^{-1} \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{p}I_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix} \\ &= \varphi_{\mathcal{G}}(X) (\mathcal{V}_Y^{-1} \mathcal{E}^{-1} + p^M \tilde{v}) \begin{pmatrix} \frac{1}{p}I_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $\tilde{v} = (\varphi_{\mathcal{G}}(v_1) - v - p^M \varphi_{\mathcal{G}}(v_1)v) \mathcal{V}_Y^{-1} \mathcal{E}^{-1}$ .

Précisons ces calculs :

$$v, v_1 \in \frac{1}{p} \mathfrak{m}_{[1/(p-1), p]},$$

si bien que

$$\varphi_{\mathcal{G}}(v_1) \in \frac{1}{p} \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}.$$

Ainsi

$$p^M v \varphi_{\mathcal{G}}(v_1) \in \frac{1}{p} \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}$$

et au final,

$$\varphi_{\mathcal{G}}(v_1) - v - p^M \varphi_{\mathcal{G}}(v_1)v \in \frac{1}{p} \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}.$$

D'où, comme  $\mathcal{V}_Y^{-1} \in \frac{1}{Y^{ep/(p-1)}} \mathcal{G}_{[1, p]}$ ,

$$p\tilde{v} \in \frac{1}{Y^{ep/(p-1)}} \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}.$$

Comme enfin

$$\varphi_{\mathcal{G}}(X) \in pX\mathcal{G}_{[0, p]}$$

et

$$X \in Y^{ep/(p-1)} \mathcal{G}_{[p/(p-1), \infty[}$$

on déduit le résultat. ◇

En remarquant que

$$\varphi\left(XY \circ \frac{d}{dY}\right) = \frac{\varphi(X)}{p} Y \frac{d}{dY} \circ \varphi$$

et que

$$u \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}$$

on calcule modulo  $p^M \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{G}} \left( XY \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) &\equiv \frac{\varphi(X)}{p} Y \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{p} I_d & 0 \\ 0 & I_{h-d} \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{\varphi(X)}{p} Y \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} &\varphi \left( XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) \\ &= \varphi_{\mathcal{G}} \left( XY \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) + \varphi_{\mathcal{G}} \left( XY \left( \mathcal{V}_Y^{(-1)} - \mathcal{V}_Y^{-1} \right) \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{\varphi(X)}{p} Y \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} + p^M u + \varphi_{\mathcal{G}} \left( XY \left( \mathcal{V}_Y^{(-1)} - \mathcal{V}_Y^{-1} \right) \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

avec  $u \in \mathfrak{m}_{[p/(p-1), p]}$ . On l'écrit  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in \frac{X^{p-1}}{p} \mathcal{G}_{[0, p]}$ , donc  $p^M u_1 \in X \mathfrak{m}_{[0, p]}$  et  $u_2 \in \mathfrak{m}_{[p/(p-1), \infty[}$ . Par ailleurs,  $\mathcal{V}_Y^{(-1)} - \mathcal{V}_Y^{-1} \in \mathcal{G}_{[0, p]} \otimes \mathbb{Q}_p$  d'où

$$\varphi_{\mathcal{G}} \left( XY \left( \mathcal{V}_Y^{(-1)} - \mathcal{V}_Y^{-1} \right) \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) \in X \mathcal{G}_{[0, p]} \otimes \mathbb{Q}_p.$$

On écrit encore

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(X)}{p} Y \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} &= XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \\ &+ \left( \frac{\varphi(X)}{p} - X \right) Y \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \\ &+ XY \left( \mathcal{V}_Y^{-1} - \mathcal{V}_Y^{(-1)} \right) \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où les coefficients de  $XY \left( \mathcal{V}_Y^{-1} - \mathcal{V}_Y^{(-1)} \right) \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix}$  sont dans  $X \mathfrak{m}_{[0, p]} \otimes \mathbb{Q}_p$ , et

ceux de  $\left( \frac{\varphi(X)}{p} - X \right) Y \mathcal{V}_Y^{-1} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix}$  dans  $X (\mathfrak{m}_{[0, p]} + p^{M-1} \mathcal{G}_{[p/(p-1), \infty[})$  et

elle s'écrit donc  $M_1 + M_2$  avec  $M_1$  dans  $X \mathfrak{m}_{[0, p]}$  et  $M_2$  dans  $p^M \tilde{\mathbf{A}}$ .

Au final, on peut écrire

$$\varphi \left( XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) - XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} - p^M M_0 \in M_h(X \mathcal{G}_{[0, p]} \otimes \mathbb{Q}_p)$$

pour un  $M_0 \in \tilde{\mathbf{A}}$ . Ainsi, puisque  $X\mathcal{G}_{[0,p]} \otimes \mathbb{Q}_p \cap \tilde{\mathbf{A}} = X\tilde{\mathbf{A}}^+$ , on déduit que

$$\varphi \left( XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) = XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \pmod{X\tilde{\mathbf{A}}^+ + p^M \tilde{\mathbf{A}}}$$

ce qui permet de prouver la proposition grâce au calcul modulo  $X\tilde{\mathbf{A}}^+ + p^M \tilde{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned} (\varphi - 1) \left( XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) &\equiv XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \left( \frac{A^*}{p} - 1 \right) l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv (\tau - 1)x \end{aligned}$$

et au fait que les équations  $(\varphi - 1)Z = \alpha \in X\tilde{\mathbf{A}}^+ + p^M \tilde{\mathbf{A}}$  admettent une solution  $Z \in X\tilde{\mathbf{A}}^+ + p^M \tilde{\mathbf{A}}$ .  $\square$

## 2.5 Formule explicite

### 2.5.1 Énoncé du théorème

Nous en venons à la démonstration du théorème principal, la formule explicite pour le symbole de Hilbert d'un groupe formel.

#### Théorème 2.1.

Soit  $\beta \in F(YW[[Y]])$  et  $\alpha \in (W[[Y]][\frac{1}{Y}])^\times$ . On note

$$\mathcal{L}(\alpha) = \left( 1 - \frac{\varphi}{p} \right) \log \alpha(Y) = \frac{1}{p} \log \frac{\alpha(Y)^p}{\alpha^\varphi(Y^p)} \in W[[Y]].$$

Alors le symbole de Hilbert  $(\alpha(\pi), \beta(\pi))_{F,M}$  est égal à :

$$(\mathrm{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p} \circ \mathrm{Res}_Y) \mathcal{V}_Y^{-1} \left( \begin{pmatrix} \left( 1 - \frac{A^*}{p} \right) l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} d_{\log} \alpha(Y) - \mathcal{L}(\alpha) \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} \frac{A^*}{p} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right).$$

### 2.5.2 Démonstration

On utilise le fait que si  $\eta \in H^1(K, \mathbb{Z}/p^M \mathbb{Z})$  et  $r(x) \in G_K^{ab}$  est l'image par l'isomorphisme de réciprocité de  $x \in K$  alors

$$\mathrm{inv}_K(\partial x \cup \eta) = \eta(r(x)).$$

D'après la Proposition 1.3.,  $\partial \alpha(\pi)$  correspond à un triplet  $(x, y, z)$  qui est congru modulo  $XYW[[X, Y]]$  à

$$\left( -\frac{s(Y)}{X} \otimes \varepsilon - \frac{s(Y)}{2} \otimes \varepsilon, 0, Y d_{\log} S(Y) \otimes \varepsilon \right).$$

On calcule son cup-produit avec l'image

$$(x', 0, z')$$

dans  $H^1(K, F[p^M])$  de  $\theta(\beta)$  donnée par la Proposition 2.3. où l'on rappelle que

$$x' = \mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$z' \equiv XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \pmod{XW(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}.$$

On obtient le triplet  $(a, b, c)$  où :

$$a = y \mathcal{V}_Y^{-1} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$$

car  $y \in XYW[[X, Y]]$  d'après la Proposition 1.3. et  $XY \mathcal{V}_Y^{(-1)}$  est à coefficients dans  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + p^M \tilde{\mathbf{A}}$  d'après le Lemme 2.7.. De plus,

$$c = -y \otimes \gamma z' + \sum_{n \geq 1} \binom{\chi(\gamma)}{n} \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k (\tau - 1)^{k-1} z \otimes \tau^k (\tau - 1)^{n-1-k} z' \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$$

car  $y, z, z' \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ . Enfin,

$$b = z \otimes \tau x' - x \otimes \varphi z'$$

et

$$z \otimes \tau x' = (\tau - 1)(\log(S(Y))/t + \mu) \tau \mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \varepsilon.$$

Or d'une part

$$(\tau - 1)(\log(S(Y))/t + \mu) \equiv Y d_{\log} F(Y) \pmod{XYW[[X, Y]]}$$

et d'autre part, d'après le Lemme 2.7.,  $\tau \left( \mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est congru modulo  $XYW[[X, Y]]$  à

$$\mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} + XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme  $XY \mathcal{V}_Y^{(-1)}$  est à coefficients dans  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}) + p^M \tilde{\mathbf{A}}$ ,

$$z \otimes \tau x' \equiv Y \mathcal{V}_Y^{(-1)} \begin{pmatrix} (\frac{A^*}{p} - 1)l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} d_{\log} S(Y) \pmod{W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}.$$

Enfin,

$$-x \otimes \varphi z' = \left( -\frac{s(Y)}{X} - \frac{s(Y)}{2} \right) z' \otimes \varepsilon$$

et comme

$$z' \equiv XY \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \left( \frac{l_{\mathcal{A}}(\beta)}{m_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \pmod{XW(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})},$$

on a la congruence

$$-x \otimes \varphi z' \equiv Y s(Y) \mathcal{V}_Y^{(-1)} \frac{d}{dY} \left( \frac{l_{\mathcal{A}}(\beta)}{m_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \pmod{W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})}.$$

Au final, le triplet  $(a, b, c)$  est congru modulo  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  à :

$$\left( 0, Y \mathcal{V}_Y^{(-1)} \left( \left( \left( \frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1 \right) l_{\mathcal{A}}(\beta) \right) d_{\log} S(Y) + \frac{d}{dY} \left( \frac{l_{\mathcal{A}}(\beta)}{m_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \frac{1}{p} \log \frac{S(Y)^p}{S(Y^p)} \right) \otimes \varepsilon, 0 \right).$$

Le théorème découle alors du lemme :

**Lemme 2.8.**

Soit  $C = C_{\varphi, \gamma, \tau}(\tilde{\mathbf{A}}_L(1))$  le complexe calculant la cohomologie galoisienne de  $\mathbb{Z}_p(1)$ .

1. Soit  $f(Y) = \sum_{n>0} \frac{a_n}{Y^n} \in M_h(\tilde{\mathbf{A}})$  la partie principale d'une série  $\mathcal{V}_Y^{(-1)} g(Y)$  avec  $g(Y)$  à coefficients dans  $W[[Y]]$ . Alors il existe un triplet  $(x_1, x_2, 0)$  à coefficients dans  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$  tel que

$$(x_1, x_2 + f(Y) \otimes \varepsilon, 0) \in B^2(C).$$

Autrement dit son image dans  $H^2(K, \mathbb{Z}_p(1))$  est un cobord.

2. Soit  $(x, y, z) \in Z^2(C)$  avec  $x, y, z \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})(1)$  alors

$$(x, y, z) \in B^2(C).$$

3. Soit  $w \in W$  alors

$$(0, w \otimes \varepsilon, 0) \in Z^2(C)$$

et son image par l'isomorphisme de réciprocité est  $\text{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}(w)$ .

*Preuve du Lemme :* Posons

$$w_n = \frac{1}{Y^n ((1+X)^{-n} - 1)} + \frac{1}{2Y^n} \in \tilde{\mathbf{A}}_L.$$

Alors

$$(\tau - 1)w_n = \frac{1}{Y^n} + \frac{1}{2}(\tau - 1)\frac{1}{Y^n} \tag{2.8}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma \left( \frac{\varepsilon}{Y^n ((1+X)^{-n} - 1)} \right) &= \frac{\chi(\gamma)\varepsilon}{Y^n ((1+X)^{-\chi(\gamma)n} - 1)} \\ &= \chi(\gamma)\delta^{-1} \left( \frac{\varepsilon}{Y^n ((1+X)^{-n} - 1)} \right). \end{aligned}$$

Le développement limité

$$\delta^{-1} = \chi(\gamma) - \frac{\chi(\gamma)(\chi(\gamma) - 1)}{2}(\tau - 1) + (\tau - 1)^2 g(\tau - 1)$$

où  $g(\tau - 1)$  est une série entière en  $\tau - 1$  donne la relation

$$(\gamma - 1)w_n \otimes \varepsilon = g(\tau - 1)(\tau - 1)\frac{1}{Y^n}. \quad (2.9)$$

D'après le lemme 2.7.,  $(\tau - 1)\mathcal{V}^{(-1)}U$  pour  $U \in W[[Y]]$  est à coefficients dans  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$ . La relation 2.8 montre alors

$$(\tau - 1) \sum_{n>0} a_n w_n = f(Y) \mod W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$$

et la relation 2.9 que

$$(\gamma - 1) \sum_{n>0} a_n w_n = 0 \mod W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})$$

ce qui montre que le cobord image du triplet  $(\sum_{n>0} a_n w_n, 0, 0)$  dans  $H^2(C)$  est de la forme voulue, d'où l'on déduit 1.

Pour montrer 2. on doit résoudre pour  $x, y, z \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})(1)$  le système

$$\begin{aligned} x &= (\gamma - 1)u + (1 - \varphi)v \\ y &= (\tau - 1)u + (1 - \varphi)w \\ z &= (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)v + (\delta - \gamma)w \end{aligned}$$

On considère pour cela  $v, w \in W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})(1)$  les solutions de

$$\begin{aligned} x &= (\varphi - 1)v \\ y &= (\varphi - 1)w \end{aligned}$$

qui existent, et sont même uniques car  $\varphi - 1$  est bijectif sur  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})(1)$ . Alors, en combinant ces équations avec celles du système, on obtient

$$(\varphi - 1)((\tau^{\chi(\gamma)} - 1)v + (\delta - \gamma)w) = -(\tau^{\chi(\gamma)} - 1)x - (\delta - \gamma)y = (\varphi - 1)z.$$

Mais comme  $z$  et  $(\tau^{\chi(\gamma)} - 1)v + (\delta - \gamma)w$  sont des éléments de  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})(1)$  où  $(\varphi - 1)$  est injectif, on a bien l'égalité

$$z = (\tau^{\chi(\gamma)} - 1)v + (\delta - \gamma)w ;$$

$(x, y, z)$  est donc un cobord, image de  $(0, v, w)$ .

Enfin, pour le 3., on remarque que

$$(0, w \otimes \varepsilon, 0) = (0, 0, 1 \otimes \varepsilon) \cup (w, 0, 0).$$

Or  $(0, 0, 1 \otimes \varepsilon)$  est d'après la Proposition 1.3. l'image par l'application de Kummer de  $\pi$  une uniformisante de  $K$ . (Pour le voir, il suffit de prendre  $F(Y) = Y$ .) Par ailleurs  $(0, w \otimes \varepsilon, 0)$  correspond d'après le Théorème 1.3. du Chapitre I au caractère  $\eta$  de  $G_K$  défini de la manière suivante : on choisit  $b \in \tilde{\mathbf{A}}$  tel que  $(\varphi - 1)b = w$ , alors

$$\forall g \in G, \quad \eta(g) = (1 - g)b.$$

On remarque que comme  $w \in W$ , on peut choisir  $b \in W^{nr}$  et que l'image par l'application de Kummer d'une uniformisante étant le Frobenius  $\text{Frob}_K$ , l'image par l'isomorphisme de réciprocité de  $(0, w \otimes \varepsilon, 0)$  est

$$(1 - \text{Frob}_K)b = (1 - \varphi^{f_K})b = (1 + \varphi + \dots + \varphi^{f_K-1})w = \text{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p} w$$

où  $f_K = f(K/\mathbb{Q}_p)$ , ce qui montre le lemme.  $\diamond$

Le théorème se prouve alors en remarquant que, vu la congruence déjà montrée, le triplet  $(a, b, c)$  s'écrit comme somme d'un triplet  $(0, g(Y), 0)$  où  $g$  est la partie strictement négative d'une série vectorielle en  $Y$  donc correspond à un cobord dans  $H^2(K, \mathbb{Z}/p^M \mathbb{Z})$ , d'un triplet à coefficients dans  $W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}})(1)$ , donc également un cobord d'après le lemme ci-dessus et enfin d'un triplet  $(0, w \otimes \varepsilon, 0)$  où  $w$  est le terme constant de la série vectorielle

$$Y \mathcal{V}_Y^{(-1)} \left( \begin{pmatrix} (\frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1) l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} d_{\log \alpha(Y)} + \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \frac{1}{p} \log \frac{\alpha(Y)^p}{\alpha(Y^p)} \right)$$

donc le résidu de

$$\mathcal{V}_Y^{-1} \left( \begin{pmatrix} (\frac{\mathcal{A}^*}{p} - 1) l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} d_{\log \alpha(Y)} + \frac{d}{dY} \begin{pmatrix} l_{\mathcal{A}}(\beta) \\ m_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \frac{1}{p} \log \frac{\alpha(Y)^p}{\alpha(Y^p)} \right).$$

Le seul terme ayant une contribution non nulle est donc le résidu, et cette contribution est, d'après le lemme, donnée par la trace, ce qui achève la preuve.  $\square$



# Bibliographie

- [Abr95] V. A. Abrashkin. A ramification filtration of the Galois group of a local field. II. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 208(Teor. Chisel, Algebra i Algebr. Geom.) :18–69, 1995. Dedicated to Academician Igor’ Rostislavovich Shafarevich on the occasion of his seventieth birthday (Russian).
- [Abr97] V. A. Abrashkin. Explicit formulas for the Hilbert symbol of a formal group over Witt vectors. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 61(3) :3–56, 1997.
- [Ben97] Denis Benois. Périodes  $p$ -adiques et lois de réciprocité explicites. *J. Reine Angew. Math.*, 493 :115–151, 1997.
- [Ben00] Denis Benois. On Iwasawa theory of crystalline representations. *Duke Math. J.*, 104(2) :211–267, 2000.
- [Ber02] Laurent Berger. Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles. *Invent. Math.*, 148(2) :219–284, 2002.
- [Ber03] Laurent Berger. Bloch and Kato’s exponential map : three explicit formulas. *Doc. Math.*, (Extra Vol.) :99–129 (electronic), 2003. Kazuya Kato’s fiftieth birthday.
- [Ber04] Laurent Berger. Limites de représentations cristallines. *Compos. Math.*, 140(6) :1473–1498, 2004.
- [Bre99] Christophe Breuil. Une application de corps des normes. *Compositio Math.*, 117(2) :189–203, 1999.
- [CC98] F. Cherbonnier and P. Colmez. Représentations  $p$ -adiques surconvergentes. *Invent. Math.*, 133(3) :581–611, 1998.
- [CC99] Frédéric Cherbonnier and Pierre Colmez. Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques d’un corps local. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :241–268, 1999.
- [Col81] Robert F. Coleman. The dilogarithm and the norm residue symbol. *Bull. Soc. Math. France*, 109(4) :373–402, 1981.
- [Col92] Pierre Colmez. Périodes  $p$ -adiques des variétés abéliennes. *Math. Ann.*, 292(4) :629–644, 1992.

- 
- [FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille. Construction de représentations  $p$ -adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(4) :547–608 (1983), 1982.
  - [Fon77] Jean-Marc Fontaine. *Groupes  $p$ -divisibles sur les corps locaux*. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Astérisque, No. 47-48.
  - [Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations  $p$ -adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
  - [Fon94] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes  $p$ -adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
  - [Her98] Laurent Herr. Sur la cohomologie galoisienne des corps  $p$ -adiques. *Bull. Soc. Math. France*, 126(4) :563–600, 1998.
  - [Her01] Laurent Herr. Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate. *Math. Ann.*, 320(2) :307–337, 2001.
  - [Hon70] Taira Honda. On the theory of commutative formal groups. *J. Math. Soc. Japan*, 22 :213–246, 1970.
  - [Kis06] Mark Kisin. Crystalline representations and  $F$ -crystals. In *Algebraic geometry and number theory*, volume 253 of *Progr. Math.*, pages 459–496. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.
  - [NSW00] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
  - [Sch06] Anthony J. Scholl. Higher fields of norms and  $(\phi, \Gamma)$ -modules. *Doc. Math.*, (Extra Vol.) :685–709 (electronic), 2006.
  - [Sen80] Shankar Sen. On explicit reciprocity laws. *J. Reine Angew. Math.*, 313 :1–26, 1980.
  - [Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l’Université de Nancago, No. VIII.
  - [Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.
  - [VD00] S. V. Vostokov and O. V. Demchenko. An explicit formula for the Hilbert pairing of formal Honda groups. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 272(Vopr. Teor. Predst. Algebr i Grupp. 7) :86–128, 346, 2000.
  - [Ven03] Otmar Venjakob. A non-commutative Weierstrass preparation theorem and applications to Iwasawa theory. *J. Reine Angew. Math.*, 559 :153–191, 2003. With an appendix by Denis Vogel.

- [Vos00] Sergei V. Vostokov. Explicit formulas for the Hilbert symbol. In *Invitation to higher local fields (Münster, 1999)*, volume 3 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 81–89 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000.
- [Wac96] Nathalie Wach. Représentations  $p$ -adiques potentiellement cristallines. *Bull. Soc. Math. France*, 124(3) :375–400, 1996.
- [Win83] Jean-Pierre Wintenberger. Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(1) :59–89, 1983.